

1. MATRICE I DETERMINANTE

Matrica reda $m \times n$ je pravougana šema realnih brojeva

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

koja ima m redova (vrsta) i n kolona. Opšti element matrice je oblika a_{ij} , gde indeks i predstavlja red, a indeks j kolonu u kojoj se nalazi element. Uređenu n -torku $a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}$ nazivamo **i -ta vrsta**, a uređenu m -torku $a_{1j} a_{2j} \dots a_{mj}$ nazivamo **j -ta kolona**.

Umesto pravougaone šeme opšti oblik matrice možemo kraće zapisati $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Ako je broj redova matrice jednak broju kolona, odnosno $m = n$, kažemo da je matrica **kvadratna**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

sporedna dijagonalu

glavna dijagonalu

Elementi $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ kvadratne matrice čine **glavnu dijagonalu**, a elementi $a_{1n} a_{2n-1} \dots a_{n1}$ čine **sporednu dijagonalu**.

Matricu dimenzije $1 \times n$ zovemo **matrica-vrsta**, $A = [a_{11} a_{12} \dots a_{1n}]$, a matricu dimenzije $m \times 1$ zovemo

$$\text{matrica-kolona. } A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Primer 1. Matrica $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ima tri reda i dve kolone i kaže se da je to matrica reda 3×2 . Elementi

prvog reda su 1 i -3, elementi druge kolone su -3, 5 i 4.

Matrica $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ je kvadratna, reda 2. Elementi -3 i -1 su elementi na glavnoj dijagonali, a 2 i 4 su elementi na sporednoj dijagonali.

1.1 Operacije sa matricama

Definicija 1. Neka su $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrice i neka je $\lambda \in R$. **Zbir matrica** A i B je matrica $C = A + B$ određena sa $C = [c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$.

Proizvod skalara λ i matrice A je matrica D određena sa $D = \lambda \cdot A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$.

Iz definicije vidimo da se mogu sabirati samo matrice istih dimenzija (broj vrsta u prvoj matrici jednak je broju vrsta u drugoj matrici i broj kolona u prvoj matrici jednak je broju kolona u drugoj matrici). Sabiraju se elementi koji se nalaze na istim pozicijama. Kada je u pitanju proizvod broja i matrice, svaki element matrice množi se tim brojem.

$$\text{Primer 2. } \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 15 \\ 0 & 10 & -20 \end{bmatrix}.$$

Matricu čiji su svi elemnti 0, nazivamo **nula-matrica** $O = [0]_{m \times n}$.

Osobine zbiru matrica i proizvoda matrice i skalara

Neka su A , B i C matrice istog tipa i neka su α i β realni brojevi. Tada važi:

- 1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ **asocijativni zakon**
- 2) $A + B = B + A$ **komutativni zakon**
- 3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- 4) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$
- 5) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$
- 6) $O + A = A + O = A$ **nula-matrica je neutralni element za sabiranje matrica.**

Jedinična matrica reda n u oznaci I_n je kvadratna matrica reda n čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jedinice, a svi ostali nule.

$$\text{Primer 3. } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nadalje ćemo jediničnu matricu obeležavati samo sa I bez indeksa.

Definicija 2. Neka su $A = [a_{ij}]_{m \times k}$ i $B = [b_{ij}]_{k \times n}$ matrice. **Proizvod matrica** A i B je matrica

$$C = A \cdot B = \left[\sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj} \right]_{m \times n}.$$

Dve matrice mogu da se pomnože samo u slučaju kada je broj kolona u prvoj matrici jednak broju redova u drugoj matrici.

Primer 4. Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ izračunaj $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu ovog primera možemo zaključiti da za proizvod dve matrice ne važi komutativni zakon, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Osobine proizvoda matrica

Neka su A , B i C matrice i $\alpha \in R$ (α je realan broj). Tada važi:

- 1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ **asocijativni zakon**
- 2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ **distributivnost proizvoda prema zbiru sa leve**

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \quad \text{i desne strane}$$
- 3) $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$
- 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$ **jedinična matrica je neutralni element za proizvod matrica.**

Stepen matrice

Za kvadratnu matricu A i $n, p, q \in N$ (n, p i q su prirodni brojevi) važi

$$A^0 = I,$$

$$A^1 = A,$$

$$A^2 = A \cdot A,$$

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A^{n-1},$$

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q}$$

Primer 5. Ako je $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, izračunaj A^2 i A^3 .

$$A^2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 & -3 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -16 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 17 & -16 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \cdot (-3) + (-16) \cdot 2 & 17 \cdot 4 + (-16) \cdot (-1) \\ -8 \cdot (-3) + 9 \cdot 2 & -8 \cdot 4 + 9 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -83 & 84 \\ 42 & -41 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ili može i ovako da se računa

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 & -16 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cdot 17 + 4 \cdot (-8) & -3 \cdot (-16) + 4 \cdot 9 \\ 2 \cdot 17 + (-1) \cdot (-8) & 2 \cdot (-16) + (-1) \cdot 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -83 & 84 \\ 42 & -41 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definicija 3. Neka je $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrica. **Transponovana matrica** matrice A u oznaci A^T je matrica

$$A^T = [a_{ij}]^T_{m \times n} = [a_{ji}]_{n \times m}.$$

Dakle, transponovana matrica matrice A se dobija tako što vrste i kolone zamene mesta.

Primer 6. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

1.2 Determinante

Neka je A kvadratna matrica reda n , $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Svakoj kvadratnoj matrici se pridružuje determinanta u oznaci $\det(A)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanta je realan broj koji se izračunava na sledeći način:

1) ako je $n = 1$, $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$ (determinanta I reda)

2) ako je $n = 2$, $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (determinanta II reda)

3) ako je $n = 3$, za izračunavanje determinante može da se koristi **Sarusovo pravilo**.

Ako su elementi determinante $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, dopisujemo elemente prve i druge

kolone i računamo vrednost determinante prema sledećem obrascu

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Primer 7. Izračunati determinantu matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot 3 + (-3) \cdot 6 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 0 - (-3 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \cdot 0) =$$

$$= -6 - (-9) = 3$$

Definicija 3. Neka je $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrica. **Transponovana matrica** matrice A u oznaci A^T je matrica $A^T = [a_{ij}]_{m \times n}^T = [a_{ji}]_{n \times m}$.

Dakle, transponovana matrica matrice A se dobija tako što redovi i kolone zamene mesta. Prvi red postaje prva kolona, drugi red postaje druga kolona, itd.

$$\text{Primer. } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Za determinante važe sledeća svojstva:

- 1) Ako su svi elementi jedne vrste ili kolone matrice A nule, onda je $\det A = 0$;
- 2) Ako su u kvadratnoj matrici elementi jedne vrste (kolone) jednakili proporcionalni elementima druge vrste (kolone), tada je $\det A = 0$;
- 3) Za proizvoljne kvadratne matrice A i B reda n važi $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$;
- 4) $\det I = 1$, determinanta jedinične matrice bilo kog reda je 1.
- 5) $\det A^T = \det A$ determinante matrice A i transponovane matrice A^T su jednake.

Primer. 1) Ako su elementi drugog reda matrice nule, onda je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 \cdot a_{33} + a_{12} \cdot 0 \cdot a_{31} + a_{13} \cdot 0 \cdot a_{32}$$

$$-(a_{31} \cdot 0 \cdot a_{13} + a_{32} \cdot 0 \cdot a_{11} + a_{33} \cdot 0 \cdot a_{12}) = 0$$

2) Ako su elementi prvog i drugog reda isti

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{11} \cdot a_{32}$$

$$-(a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{13} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{11} \cdot a_{12}) = a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{33} \cdot a_{11} \cdot a_{12} + a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{13} + a_{13} \cdot a_{11} \cdot a_{32} - a_{32} \cdot a_{13} \cdot a_{11} = 0$$

Minor i kofaktor

Definicija 1. Minor M_{ij} koji odgovara elemntu a_{ij} kvadratne matrice A reda n je determinanta reda $n - 1$ koja se dobija izostavljanjem i -te vrste i j -te kolone u determinanti A .

Definicija 2. Neka je M_{ij} minor elemnta a_{ij} kvadratne matrice A reda n . **Kofaktor** elementa a_{ij} matrice A u oznaci A_{ij} je $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

1.3 Inverzna matrica

Definicija 1. Neka je A kvadratna matrica reda n . Ako postoji kvadratna matrica B reda n takva da važi $A \cdot B = B \cdot A = I$, kažemo da je B **inverzna matrica** matrice A i zapisujemo $A^{-1} = B$.

Definicija 2. Za kvadratnu matricu A reda n kažemo da je **regularna** ako je $\det A \neq 0$. U suprotnom kažemo da je matrica **singularna**.

Formula za izračunavanje inverzne matrice

Za kvadratnu matricu reda n , $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, inverzna matrica A^{-1}

izračunava se po sledećoj formuli

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

gde je A_{ij} kofaktor koji odgovara elementu a_{ij} . Na osnovu formule zaključujemo da samo za regularne matrice postoji inverzna matrica. Matrice za koje postoji inverzna matrica nazivamo invertibilne matrice.

Primer. Izračunati inverznu matricu matrice: a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-3) = -1 + 6 = 5$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}[1] = 1 \quad A_{12} = (-1)^{1+2}[2] = (-1) \cdot 2 = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}[-3] = (-1) \cdot (-3) = 3 \quad A_{22} = (-1)^{2+2}[-1] = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Provera. Mora da važi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) & (-1) \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & (-2) \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ovim smo pokazali da je za matricu $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, inverzna matrica $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 - (4 - 3 + 0) = -1 - 1 = -2$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - (-3) = -1 + 3 = 2, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2, \quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-4) = 5, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 0) = 1$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 0) = -3$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$C^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 6 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Provera. } C \cdot C^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 6 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$