

2. SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Definicija 1. Sistem od m linarnih jednačina sa n nepoznatih x_1, x_2, \dots, x_n čine jednačine

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

gde su a_{ij} i b_i ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) realni brojevi. Brojevi a_{ij} se zovu **koeficijenti** uz promenljive, a brojevi b_i **slobodni članovi**.

Ukoliko je $n = m$, (broj nepoznatih jednak broju jednačina) kažemo da je sistem jednačina **kvadratni**.

Uređena n -torka realnih brojeva c_1, c_2, \dots, c_n je **rešenje sistema**, ako prilikom zamene promenljive x_i odgovarajućim brojem c_i važe jednakosti između leve desne strane jednačina u sistemu jednačina.

Primer 1. Dat je sistem od dve jednačine sa dve nepoznate:

$$2x + 5y = 1$$

$$3x + 7y = 2$$

Ovo je primer kvadratnog sistema jednačina. $a_{11} = 2, a_{12} = 5, a_{21} = 3, a_{22} = 7$ su koeficijenti uz promenljive. Slobodni koeficijenti su: $b_1 = 1, b_2 = 2$. Rešenje ovog sistema jednačina je uređeni par brojeva $(3, -1)$. To znači da je rešenje $x = 3$ i $y = -1$. Ako zamenimo ove vrednosti u sistemu jednačina dobijamo

$$2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) = 1$$

$$3 \cdot 3 + 7 \cdot (-1) = 2$$

Kada izračunamo dobijamo identitete

$$6 - 5 = 1$$

$$9 - 7 = 2$$

Sistem jednačina je **saglasan** ako ima bar jedno rešenje (jednu n -torku brojeva). U suprotnom, ako sistem jednačina nema rešenja, kaže se da je sistem **nesaglasan**. Saglasan sistem koji samo jedno rešenje (jednu n -torku brojeva) je **određen**, a sistem koji ima više od jednog rešenja (više n -torki brojeva) je **neodređen**.

Metoda zamene

Primer 2. Rešiti sistem jednačina

$$2x + 5y = 1$$

$$3x + 7y = 2$$

Iz prve jednačine $2x + 5y = 1$ ćemo izraziti promenljivu $x = \frac{1}{2}(1 - 5y)$. U drugoj jednačini zamenjujemo x sa $\frac{1}{2}(1 - 5y)$.

$$3 \cdot \frac{1}{2}(1 - 5y) + 7y = 2$$

$$\frac{3}{2} - \frac{15}{2}y + 7y = 2$$

$$-\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$$

$$y = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1 - 5 \cdot (-1)) = 3$$

Rešenje sistema je uređeni par $(3, 1)$.

Primer 3. Rešiti sistem jednačina

$$2x - 3y + z = 7$$

$$3x - 2y - z = 3$$

$$x - y + 2z = 6$$

Iz prve jednačine $2x - 3y + z = 7$ ćemo izraziti promenljivu $z = 7 - 2x + 3y$. U drugoj i trećoj jednačini, zamenjujemo promenljivu z sa $7 - 2x + 3y$. Na taj način sistem od tri jednačine sa tri nepoznate, svodimo na sistem od dve jednačine sa dve jednačine.

$$3x - 2y - (7 - 2x + 3y) = 3$$

$$x - y + 2 \cdot (7 - 2x + 3y) = 6$$

$$5x - 5y = 10$$

$$-3x + 5y = -8$$

Iz jednačine $5x - 5y = 10$ ćemo izraziti promenljivu $x = \frac{1}{5}(10 + 5y) = 2 + y$ i zameniti u drugoj jednačini $-3x + 5y = -8$.

$$-3(2 + y) + 5y = -8$$

$$-6 - 3y + 5y = -8$$

$$2y = -2 \quad y = -1 \quad x = 2 + y = 2 - 1 = 1 \quad z = 7 - 2x + 3y = 7 - 2 - 3 = 3$$

Sistem je saglasan, ima jedinstveno rešenje $(1, -1, 3)$.

Gausova metoda eliminacije.

Pomnožimo jednačine tako da uz jednu promenljivu dobijemo iste koeficijente iste brojne vrednosti ali suprotnog znaka, saberemo ih i na taj način eliminišemo jednu promenljivu.

Primer 4. Rešiti sistem jednačina

$$x + 2y - z = 2$$

$$3x - y + 2z = 7$$

$$-x - y + 2z = 3$$

Prvu jednačinu množimo sa 2 i sabiramo sa drugom i sa trećom jednačinom, kako bi u preostale dve jednačine eliminisali promenljivu z .

$$x + 2y - z = 2$$

$$5x + 3y = 11$$

$$x + 3y = 7$$

Sada drugu jednačinu množimo sa -1 i sabiramo sa trećom jednačinom, kako bi u trećoj jednačini eliminisali promenljivu y .

$$x + 2y - z = 2$$

$$5x + 3y = 11$$

$$-4x = -4$$

Iz treće jednačine računamo $x = 1$. U drugoj jednačini menjamo vrednost za x i računamo vrednost za y .

$$5 \cdot 1 + 3y = 11 \quad y = \frac{11 - 5}{3} \quad y = 2$$

Sada u prvoj jednačini zamenjujemo vrednosti za x i y i računamo vrednost promenljive z .

$$1 + 2 \cdot 2 - z = 2 \quad z = 1 + 4 - 2 \quad z = 3$$

Sistem jednačina ima jedinstveno rešenje $(1, 2, 3)$.

Kvadratni sistem jednačina može da se predstavi i pomoću matrične jednačine.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sistem jednačina možemo predstaviti matričnom jednačinom

$$A \cdot X = B$$

Rešavanjem matrične jednačine dolazimo do rešenja sistema jednačina.

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Sistem jednačina ima rešenja ako je matrica A regularna.

Primer 5. Rešiti sistem jednačina

$$3x - 4y + 5z = 4$$

$$2x - 3y + z = 3$$

$$3x - 5y - z = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Množenjem matrica A i X dobijamo

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 4y + 5z \\ 2x - 3y + z \\ 3x - 5y - z \end{bmatrix}$$

Sistem jednačina zapisan u matričnom obliku je $\begin{bmatrix} 3x - 4y + 5z \\ 2x - 3y + z \\ 3x - 5y - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot X = B$$

Rešavamo matričnu jednačinu

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Najpre računamo A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 9 - 12 - 50 - (-45 - 15 + 8) = -53 - (-52) = -1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 4 - (-5) = 9 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 3) = 5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - (-9) = -1 \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -(4 - (-25)) = -29$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 15 = -18 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-15 - (-12)) = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 - (-15) = 11 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 10) = 7$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - (-8) = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \cdot 4 + 29 \cdot 3 - 11 \cdot 1 \\ -5 \cdot 4 + 18 \cdot 3 - 7 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Rešenje sistema je uređena trojka $(44, 27, -4)$, odnosno $x = 44, y = 27, z = -4$.

Za rešavanje kvadratnog sistema jednačina može da se primeni i **Kramerova metoda**.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\text{Determinanta sistema je } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinanta koja odgovara promenlivoj x_1 dobija se kad se u determinanti sistema, prva kolona zameni slobodnim koeficijentima.

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinanta koja odgovara promenlivoj x_2 dobija se kad se u determinanti sistema, druga kolona zameni slobodnim koeficijentima.

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

...

Determinanta koja odgovara promenlivoj x_n dobija se kad se u determinanti sistema, n -ta kolona zameni slobodnim koeficijentima.

$$D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Ako je determinanta sistema različita od nule, $D \neq 0$, sistem ima **jedinstveno rešenje**

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \dots, x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$$

Ako je $D = 0$ i bar jedna od determinanti D_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, n$ različita od nule, sistem je **nemoguć** (nema rešenja).

Ako je $D = 0$ i sve determinante D_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, n$ jednake nuli sistem je **neodređen**.

Primer 6. Rešiti sistem jednačina

$$x + 2y = 0$$

$$-x + y + z = 1$$

$$x + 2y + 3z = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 0 - (0 + 2 - 6) = 5 - (-4) = 9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (0 + 0 - 6) = 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - (0 + 2 + 0) = 0$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{9} = 0$$

Sistem ima jedinstveno rešenje $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

Primer 7. Rešiti sistem jednačina:

$$2x - y - 2z = -2$$

$$3x - 4y + 2z = 2$$

U ovom sistemu imamo dve jednačine i tri nepoznate. U pitanju je pravougaoni sistem i može da se reši metodom zamene ili Gausovom metodom eliminacije. Primeničemo Gausovu metodu za rešavanje.

$$2x - y - 2z = -2$$

$$\underline{3x - 4y + 2z = 2 / \text{drugoj jednačini dodajemo prvu jednačinu}}$$

$$2x - y - 2z = -2$$

$$5x - 5y = 0 \Leftrightarrow 5(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

u prvoj jednačini zamenjujemo y sa x .

$$2x - x - 2z = -2 \Leftrightarrow x - 2z = -2 \Leftrightarrow 2z = x + 2 \Leftrightarrow z = \frac{x + 2}{2}$$

Sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Promenljive y i z možemo da izražimo preko promenljive x . $y = x$, $z = \frac{x+2}{2}$. Ako umesto x uvedemo parametar a , rešenja su oblika $(a, a, \frac{a+2}{2})$, gde je a realan broj. Na primer ako je $a = 2$, dobijamo rešenje $(2, 2, 2)$. Zamenom u sistemu dobijamo

$$2 \cdot 2 - 2 - 2 \cdot 2 = -2$$

$$3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 2$$

Ako je $a = -2$, rešenje je $(-2, -2, 0)$, itd.

Primer 8. Rešiti sistem jednačina:

$$x + y = 2$$

$$-2x - 3y = 2$$

$$2x - 2y = -3$$

Ovaj sistem ima tri jednačine i dve nepoznate, dakle opet je u pitanju pravougaoni sistem jednačina. Ovaj sistem ćemo rešiti primenom metode zamene. Iz prve jednačine ćemo izraziti x i zameniti u druge dve jednačine.

$$x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y$$

$$-2x - 3y = 2$$

$$2x - 2y = -3$$

$$x + y = 2$$

$$-2 \cdot (2 - y) - 3y = 2$$

$$2 \cdot (2 - y) - 2y = -3$$

$$x + y = 2$$

$$-4 + 2y - 3y = 2$$

$$4 - 2y - 2y = -3$$

$$x + y = 2$$

$$-y = 6$$

$$-4y = -7$$

$$x + y = 2$$

$$y = -6$$

$$y = -\frac{7}{6}$$

Dobili smo dva rešenja za y što znači da je sistem protivrečan, nema rešenja.

Zadaci za vežbanje

Rešiti sistem jednačina:

- Metodom zamene

$$\begin{array}{ll} x + 2y - z = 2 & x + 2y - 6z = -13 \\ 1) \quad 3x - y + 2z = 7 & 2) \quad 2x + 5y + 4z = 24 \\ 4x + y + z = 5 & 3x + 10y + z = 26 \end{array}$$

- Gausovom metodom

$$\begin{array}{ll} 3x + 2y + z = 5 & x + y + z = 3 \\ 3) \quad 2x + 3y - 5z = 8 & 4) \quad x - 2y + 2z = 1 \\ 5x + y - 8z = 7 & -2x + y - 3z = 4 \end{array}$$

- Kramerovom metodom

$$\begin{array}{ll} 3x + 2y + z = 5 & 2x + y + z = -1 \\ 5) \quad 2x + 3y + z = 1 & 6) \quad -x + y + 2z = 3 \\ 2x + y + 3z = 11 & 3x + 2y + 4z = 1 \end{array}$$

- Matričnom metodom

$$\begin{array}{ll} x + 2y - z = -3 & 2x - y + 3z = -1 \\ 7) \quad 2x + 3y + z = -1 & 8) \quad x + 2y - 4z = 5 \\ x - y - z = 3 & 3x + y + 2z = 1 \end{array}$$