

3 GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJE

3.1 Granična vrednost funkcije

ε -okolina tačke a , $a \in R$, je svaki otvoreni interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, gde je $\varepsilon > 0$, prozvoljno mali realan broj. Kad kažemo da x pripada ε -okolini tačke a to znači da x pripada intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Funkcija $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ nije definisana u tački $x = -1$. Izračunaćemo vrednosti ove funkcije u okolini te tačke. Možemo uzeti za $\varepsilon = 0,2$. Računamo vrednosti funkcije za neke tačke na intervalu $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$, odnosno $(-1,2; -0,8)$.

$$f(-1,1) = \frac{(-1,1)^2 - (-1,1) - 2}{-1,1 + 1} = -3,1$$

$$f(-1,01) = \frac{(-1,01)^2 - (-1,01) - 2}{-1,01 + 1} = -3,01$$

$$f(-1,001) = \frac{(-1,001)^2 - (-1,001) - 2}{-1,001 + 1} = -3,001$$

$$f(-0,999) = \frac{(-0,999)^2 - (-0,999) - 2}{-0,999 + 1} = -2,999$$

$$f(-0,99) = \frac{(-0,99)^2 - (-0,99) - 2}{-0,99 + 1} = -2,99$$

$$f(-0,9) = \frac{(-0,9)^2 - (-0,9) - 2}{-0,9 + 1} = -2,9$$

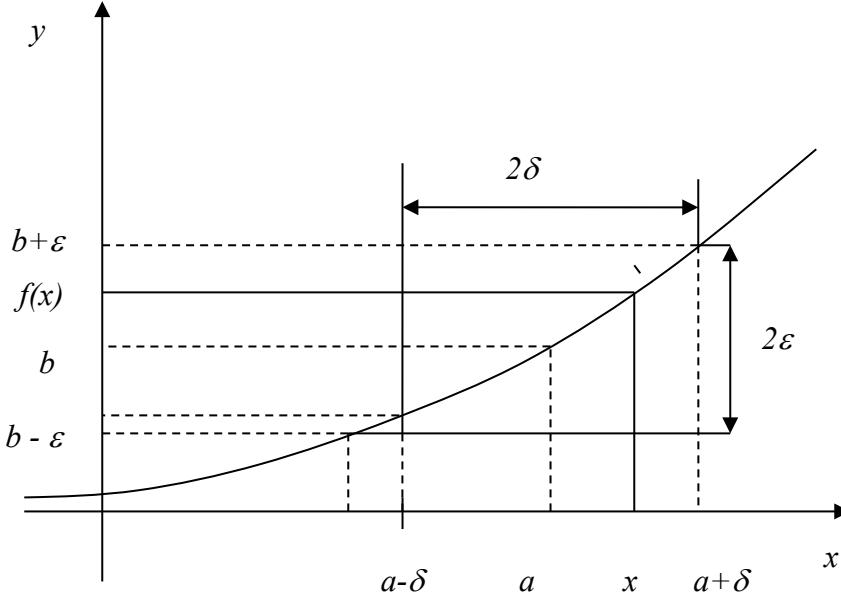
Bilo da uzimamo tačke koje se nalaza sa leve strane tačke $x = -1$, bilo da uzimamo tačke sa desne strane, za vrednost funkcije dobijamo brojeve koji su vrlo blizu broja -3 . Možemo zaključiti da što je broj bliži broju -1 , vrednost funkcije je bliža broju -3 . U matematičkoj analizi, ovaj broj se zove granična vrednost funkcije $f(x)$, kada x teži broju -1 i zapisuje se

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$$

Sledi definicija granične vrednosti.

Definicija 1. Neka je $f : A \rightarrow R$, $A \subseteq R$ i neka je $a \in R$. Broj $b \in R$ je **granična vrednost** funkcije f u tački a , ako za svaki proizvoljno mali realan $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, δ zavisi od ε , tako da za svako $x \neq a$ za koje je $|x - a| < \delta$ važi da je $|f(x) - b| < \varepsilon$ i tada pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$



Geometrijski, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, koje zavisi od ε , tako da ako je x iz δ -okoline tačke a ($x \in (a - \delta, a + \delta)$), onda vrednost funkcije u toj tački $f(x)$ pripada ε -okolini tačke b ($f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$).

Funkcija može imati graničnu vrednost i u tački u kojoj nije definisana i takvi slučajevi su bitni kod ispitivanja toka funkcije. Da bismo mogli da nacrtamo grafik funkcije potrebno je da znamo kako se funkcija „ponaša“ u okolini tačke ili intervala gde nije definisana.

Ako u definiciji 1. uslov $|x - a| < \delta$, koji znači da x pripada δ -okolini tačke a , zamenimo uslovom $x \in (a - \delta, a)$, (x pripada levoj okolini tačke a) dobijamo definiciju leve granične vrednosti funkcije u tački a i zapisujemo $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$. A ako zamenimo uslovom $x \in (a, a + \delta)$ (x pripada desnoj okolini tačke a), dobijamo definiciju desne granične vrednosti funkcije u tački a i zapisujemo $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$.

Kažemo da za funkciju postoji granična vrednost u tački a , ako postoe leva i desna granična vrednost u tački a i ako su one jednake $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$.

Primer 1. Izračunati graničnu vrednost funkcije $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x+1}$ u tački $x = -1$.

Najpre ćemo zameniti vrednost -1 u funkciji, da vidimo šta dobijamo.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{(-1)^2 - (-1) - 2}{-1 + 1} = \frac{1 + 1 - 2}{0} = \frac{0}{0}$$

$\frac{0}{0}$ je neodređeni oblik, tako da još uvek ne znamo koja je granična vrednost funkcije. Zato moramo da izvršimo nekakvu transformaciju izraza, kako bismo mogli da izračunamo graničnu vrednost.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1 - 3x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2 - 3x - 3}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2 - 3(x+1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)((x+1) - 3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1 - 3) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 2) = -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

Izraz $\frac{x^2 - x - 2}{x+1}$, transformisali smo u $x - 2$ i onda smo mogli da izračunamo graničnu vrednost.

Posmatramo sada funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$. Ova funkcija nije definisana u tački $x = 0$. Kakve vrednosti uzima ova funkcija u okolini ove tačke?

$$f(0,1) = \frac{1}{0,1} = 10, \quad f(0,01) = \frac{1}{0,01} = 100, \quad f(0,001) = \frac{1}{0,001} = 100,$$

$$f(0,0000001) = \frac{1}{0,0000001} = 10\,000\,000$$

$$f(-0,1) = \frac{1}{-0,1} = -10, \quad f(-0,01) = \frac{1}{-0,01} = -100, \quad f(-0,001) = \frac{1}{-0,001} = -100,$$

$$f(-0,0000001) = \frac{1}{-0,0000001} = -10\,000\,000$$

Vidi se da što je x manje, $f(x) = \frac{1}{x}$, dobija sve veće vrednosti, ako je x pozitivan broj, odnosno sve manje vrednost, ako je x negativan broj, pa možemo zapisati

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2}$, situacija je slična. Razlika je u tome što je ovo parna funkcija, pa je

$$f(0,01) = \frac{1}{0,01^2} = \frac{1}{0,0001} = 10000, \quad f(-0,01) = \frac{1}{(-0,01)^2} = \frac{1}{0,0001} = 10000$$

I za pozitivne i za negativne vrednosti promenljive x , dobijaju se pozitivne vrednosti funkcije. Takođe primećujemo, da se ovde vrednosti funkcije mnogo brže povećavaju, nego kod funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$. Dakle, ovde važi da je $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Na osnovu svega izloženog, možemo zaključiti da je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty, \text{ za parni stepen}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty, \text{ za neparni stepen.}$$

Sada ćemo ispitati šta se dešava sa funkcijom $f(x) = \frac{1}{x}$ kada x uzima velike vrednosti.

$$f(1000) = \frac{1}{1000} = 0,001, \quad f(100\ 000) = 0,00001, \quad f(1\ 000\ 000) = 0,000001$$

$$f(-1000) = \frac{1}{-1000} = -0,001, \quad f(-100\ 000) = -0,00001, \quad f(-1\ 000\ 000) = -0,000001$$

Što je veća vrednost promenljive x , to ja manja vrednost funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, za x veće od nule.

S druge strane, ako x teži $-\infty$, $f(x) = \frac{1}{x}$, takođe teži nuli, pa zapisujemo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Isto se dešava i sa funkcijama $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \dots$, samo što ovde funkcija još „brže“ teži nuli.

Uopšteno, možmo zaključiti da je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Primer 2. Izračunati graničnu vrednost funkcije kad $x \rightarrow \infty$

$$f(x) = \frac{5x^3 - 2x + 1}{-2x^3 + 3x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x + 1}{-2x^3 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(\frac{5x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(\frac{-2x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{-2 + \frac{3}{x}} = \frac{5 - 0 + 0}{-2 + 0} = -\frac{5}{2}$$

$\frac{3}{x}, \frac{2}{x^2}, \frac{1}{x^3}$ teže nuli kad $x \rightarrow 0$.

Prilikom određivanja granične vrednosti funkcije sledeći oblici su „neodređeni“:

$$\boxed{\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0}$$

Ukoliko se dobije neki od ovih oblika, neophodno je izvršiti transformaciju funkcije, kako bi je sveli na oblik za koji može da se izračuna granična vrednost.

Granična vrednost ipak ne postoji uvek. Ako funkcija nije definisana u jednoj tački, a u njenoj okolini jeste, granična vrednost postoji. Ali ako funkcija nije definisana na intervalu, kao na primer funkcija \sqrt{x} , čija je oblast definisanosti $(0, +\infty)$, ne postoji granična vrednost ove funkcije kad na primer $x \rightarrow -4$.

Osobine graničnih vrednosti funkcija

Za lakše izračunavanje graničnih vrednosti može se primeniti i sledeća teorema.

Teorema 1. Neka su f i g realne funkcije definisane na skupu $A \subseteq R$, $a \in A$ i neka je

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, gde su b i c realni brojevi ($b, c \in R$). Tada važi:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \cdot b, \quad \alpha \in R;$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c;$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c;$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}, \quad \text{za } c \neq 0;$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^k = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^k = b^k, \quad k \in Q.$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}$$

3.2 Asimptote funkcije

Asimptote funkcije su prave kojima se približava grafik funkcije, ali ih ne dodiruje, kada x teži tački u kojoj funkcija nije definisana, ili kada x teži beskonačnosti.

Definicija 2. Neka je $f : A \rightarrow R$, $A \subseteq R$, gde je A neograničeni interval. Prava

$y = ax + b$, $a, b \in R$ je **asimptota** funkcije f kad $x \rightarrow +\infty$ ako je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + b}{f(x)} = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

ili **asimptota** funkcije f kad $x \rightarrow -\infty$ ako je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + b}{f(x)} = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Asimptotu $y = ax + b$ nazivamo:

(1) **kosa asimptota** ako je $a \neq 0$, (2) **horizontalna asimptota** ako je $a = 0$.

Prava $y = b$ je horizontalna asimptota udesno ako je $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, odnosno horizontalna

asimptota ulevo ako je $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Sledeća teorema nam daje formule za izračunavanje vrednosti koeficijenata a i b .

Teorema 2. Neka je $f : A \rightarrow R$, $A \subseteq R$, gde je A neograničeni interval. Prava $y = ax + b$, $a, b \in R$, $a \neq 0$, je **kosa asimptota** funkcije f ako i samo ako je

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \wedge b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax).$$

Definicija 3. Neka je $f : A \rightarrow R$, $A \subset R$, i neka je $a \in R$ i $a \notin A$. Prava $x = a$ je za funkciju f **vertikalna asimptota sa desne strane** ako je

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \vee \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty,$$

odnosno **vertikalna asimptota sa leve strane** ako je

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \vee \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Iz prethodne definicije zaključujemo da ako postoji tačka a u kojoj funkcija nije definisana, možda u toj tački postoji vertikalna asimptota, ukoliko je granična vrednost funkcije beskonačno kad $x \rightarrow a$, sa leve ili sa desne strane. Takođe, funkcija koja je definisana na $(+\infty, -\infty)$ nema vertikalne asimptote.

Iz teoreme 2. zaključujemo da ako funkcija ima horizontalnu asimptotu ne može da ima i kosu asimptotu i obrnuto.

Primer 3. Odrediti asimptote funkcije $y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$.

Oblast definisanosti ove funkcije je $Df = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ što znači da funkcija možda ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 1$.

Jednostavan način za određivanje graničnih vrednosti kad x teži tački a u kojoj funkcija nije definisana, je uvođenje smene.

Kad $x \rightarrow a^-$ (x teži a sa leve strane), uvodi se smena $x = a - h$.

Kad $x \rightarrow a^+$ (x teži a sa desne strane), uvodi se smena $x = a + h$.

h je mala pozitivna veličina koja teži nuli, što zapisujemo $h > 0, h \rightarrow 0$.

U ovom primeru $a = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \begin{cases} x = 1 - h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1-h)^2 - 4}{1 - h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - 2h + 1 - 4}{-h} = \frac{-3}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \begin{cases} x = 1 + h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^2 - 4}{1 + h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + 2h + 1 - 4}{h} = \frac{-3}{0} = -\infty$$

Dakle prava $x = 1$ jeste vertikalna asimptota. Na osnovu dobijenih graničnih vrednosti zaključujemo da kada za x uzimamo vrednosti levo od 1, funkcija teži $+\infty$, a kada za x uzimamo vrednosti desno od 1, funkcija teži $-\infty$.

Sada tražimo vrednost koeficijenata a i b kako bismo utvrdili da li postoji kosa ili horizontalna asimptota. Prema teoremi 2 je

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4}{x - 1} = 1$$

Dakle prava $y = x + 1$ je kosa asimptota. Funkcija nema horizontalnu asimptotu jer je $a \neq 0$.

3.3 Neprekidnost funkcije

Ako grafik neke funkcije možemo da nacrtamo u jednom potezu ne podižući olovku sa papira, onda za tu funkciju kažemo da je **neprekidna**. Ako se grafik funkcije ne može nacrtati u jednom potezu onda ta funkcija ima jedan ili više prekida. Sada ćemo ove pojmove definisati preciznije.

Definicija 4. Neka je $f : A \rightarrow R$, $A \subseteq R$, i neka je $x_0 \in A$. Funkcija f je **neprekidna u tački x_0** ako je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

$\Delta x = x_1 - x_0$ - nazivamo **priraštaj argumenta**

$\Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$ - nazivamo **priraštaj funkcije**

Teorema 3. Neka je $f : A \rightarrow R$, $A \subseteq R$ i neka je $x_0 \in A$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

- | | |
|---|--|
| a) funkcija f je neprekidna u tački x_0 ; | b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; |
| c) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$; | c) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$. |

Definicija 5. Funkcija $f : A \rightarrow R$, $A \subseteq R$, je **neprekidna na intervalu** $(a, b) \subseteq A$, ako je neprekidna u svakoj tački tog intervala.

Definicija 6. Neka je $f : A \rightarrow R$, $A \subseteq R$, i neka je $a \in R$. Tačka a je **tačka prekida** funkcije f ako funkcija nije definisana u tački a , ili funkcija jeste definisana ali nije neprekidna u njoj.

Primer 4. Ispitati neprekidnost funkcije $f(x)$ u tački $x = -2$. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 8}{x + 2}, & \text{za } x \neq -2 \\ 10, & \text{za } x = -2 \end{cases}$

$$f(-2) = 10,$$

Ova funkcija jeste definisana u tački $x = -2$, a da li je neprekidana u toj tački proverićemo primenom uslova c) iz teoreme 3.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \begin{cases} \text{uvodimo smenu } x = -2 - h \\ \text{gde je } h > 0 \\ i h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2 - h)^3 + 8}{-2 - h + 2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8 - 12h - 6h^2 - h^3 + 8}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-12h - 6h^2 - h^3}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(12 + 6h + h^2)}{-h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h + h^2) = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \begin{cases} \text{uvodimo smenu } x = -2 + h \\ \text{gde je } h > 0 \\ i h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2 + h)^3 + 8}{-2 + h + 2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8 + 12h - 6h^2 + h^3 + 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h - 6h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 - 6h + h^2)}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (12 - 6h + h^2) = 12$$

Dobili smo da je $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 12 \neq f(-2) = 10$, što znači da je funkcija definisana u tački -2 , ali nije neprekidna.

Osobine neprekidnih funkcija

Teorema 4. Neka su funkcije f i g neprekidne u tački x_0 i neka je $\alpha \in R$ konstanta. Tada su i funkcije $\alpha \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, ($g(x_0) \neq 0$) neprekidne u tački x_0 .

Teorema 5. Neka je $f : A \rightarrow R$, $A \subseteq R$, i neka je $[a, b] \subset A$. Ako je f neprekidna na $[a, b]$ onda je f i ograničena na $[a, b]$.

Teorema 6. Neka je $f : A \rightarrow R$, $A \subseteq R$, i neka je $[a, b] \subset A$. Ako je f neprekidna na $[a, b]$ onda ona dostiže svoju najveću i svoju najmanju vrednost na $[a, b]$.

GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJE – vežbe

1. Izračunati graničnu vrednost funkcija:

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}, \quad b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x+1}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{6-x} - 2}.$$

Rešenje.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6} &= \frac{(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - (-3) - 3}{(-3)^2 - 3 - 6} = \\ &= \frac{-27 + 27 + 3 - 3}{9 - 3 - 6} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Dobili smo neodređeni oblik, pa ćemo morati da izvršimo transformaciju funkcije na oblik za koji ćemo moći da izračunamo graničnu vrednost. Ispod razlomačke crte imamo kvadratnu funkciju $x^2 + x - 6$. Izračunaćemo njene nule, i ukoliko postoje, napisaćemo je u obliku proizvoda.

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \\ x_1 &= \frac{-1 + 5}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -3 \end{aligned}$$

Ako kvadratna funkcija $ax^2 + bx + c$ ima nule x_1 i x_2 , ona se može napisati u obliku proizvoda $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Primenom tog pravila dobijamo da je $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2(x + 3) - (x + 3)}{(x - 2)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x^2 - 1)}{(x - 2)(x + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{(-3)^2 - 1}{-3 - 2} = \frac{9 - 1}{-5} = -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x+1} = \frac{\sqrt{-1+3} - \sqrt{2}}{-1+1} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{0} = \frac{0}{0}$$

Ovde ćemo izvršiti racionalizaciju. Pomnožićemo $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x+1}$ sa $\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2}} = \\
& = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{2})(\sqrt{x+3} + \sqrt{2})}{(x+1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{2})^2}{(x+1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2})} = \\
& \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3-2}{(x+1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2}} =
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1+3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{6-x} - 2} = \frac{2^2 - 4}{\sqrt{6-2} - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{6-x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{6-x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{6-x} + 2}{\sqrt{6-x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{6-x} + 2)}{(\sqrt{6-x})^2 - 2^2} = \\
& = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{6-x} + 2)}{6 - x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{6-x} + 2)}{-(x-2)} = \\
& = \lim_{x \rightarrow 2} -(x+2)(\sqrt{6-x} + 2) = -(2+2)(\sqrt{6-2} + 2) = -16
\end{aligned}$$

2. Izračunati graničnu vrednost funkcija:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3}{x - x^3}, \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{5x^3 - 2x}, \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{x - 1}$$

Rešenja.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3}{x - x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{3}{x^3}\right)}{x^3 \left(\frac{x}{x^3} - 1\right)} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{5x^3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \left(5 - \frac{2x}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{x \left(5 - \frac{2}{x^2}\right)} =$$

$\frac{1}{x}$, i $\frac{1}{x^2}$ teže nuli kad $x \rightarrow \infty$, pa imamo

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+0+0}{x(5-0)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{5x} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{3}{5} \cdot 0 = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(4 + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(4+0)}{1-0} = \lim_{x \rightarrow \infty} 4x = 4 \cdot \infty = \infty$$

Na osnovu prethodnih primera možemo da zaključimo sledeće:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} \infty, & \text{za } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{za } n = m \\ 0, & \text{za } n < m \end{cases}$$

- Ako je najviši stepen polinoma u brojiocu n , veći od najvišeg stepena polinoma u imeniocu, m , granična vrednost je ∞ .
- Ako je najviši stepen polinoma u brojiocu n , jednak najvišem stepenu polinoma u imeniocu, m , granična vrednost je $\frac{a_0}{b_0}$.
- Ako je najviši stepen polinoma u brojiocu n , manji od najvišeg stepena polinoma u imeniocu, m , granična vrednost je 0.

3. Odrediti asimptote funkcije:

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2}, \quad b) f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3}, \quad c) f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$$

Rešenja.

a) $x^2 + 2 \neq 0$, za svaki realni broj pa je oblast definisanosti $Df = (-\infty, +\infty)$. U tom slučaju ne postoji vertikalna asimptota. Proveravamo da li postoji horizontalna asimptota. Ako postoji granična vrednost $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, onda je prava $y = b$, horizontalna asimptota.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2} = \frac{1}{1} = 1$$

U ovom slučaju je $n = m = 2$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, pa je granična vrednost 1.

Prava $y = 1$ je horizontalna asimptota. Kada postoji horizontalna, ne postoji kosa asimptota.

b) Oblast definisanosti funkcije $\frac{x^2 - 3x - 10}{x+3}$ je $Df = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$. Funkcija nije definisana u tački $x = -3$, pa ćemo proveriti da li u toj tački postoji vertikalna asimptota.

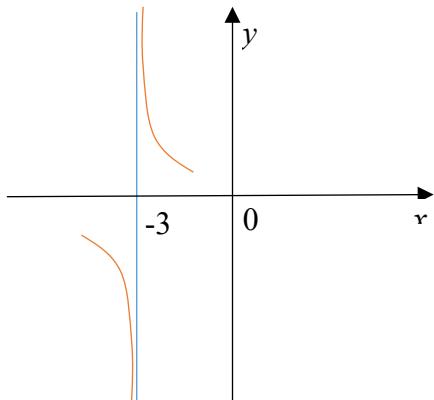
$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3} = \begin{cases} \text{smena } x = -3 - h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3 - h)^2 - 3(-3 - h) - 10}{-3 - h + 3}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 + 9 + 3h - 10}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 9h + 8}{-h} = \frac{8}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3} = \begin{cases} \text{smena } x = -3 + h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3 + h)^2 - 3(-3 + h) - 10}{-3 + h + 3}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 - 6h + h^2 + 9 - 3h - 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 9h + 8}{h} = \frac{8}{+0} = +\infty$$

Kad $x \rightarrow -3^-$ (x teži -3 sa leve strane), funkcija teži $-\infty$, a kad $x \rightarrow -3^+$ (x teži -3 sa desne strane), funkcija teži $+\infty$. To znači da postoji vertikalna asimptota $x = -3$, a ove granične vrednosti nam pokazuju kako izgleda grafik funkcije u okolini asimptote.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3} = \infty$$

jer je $n = 2, m = 1$, pa ne postoji horizontalna asimptota. Ima smisla ispitati da li postoji kosa asimptota. Opšti oblik kose asimptote je $y = ax + b$. Koeficijenti a i b se određuju po formulama

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

U našem primeru imamo

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 3x - 10}{x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 3x - 10}{\frac{x}{1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 10}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 3x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 10}{x+3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 10 - x(x+3)}{x+3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 10 - x^2 - 3x}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x - 10}{x+3} = \frac{-6}{1} = -6$$

Kosa asimptota je prava $y = x - 6$. Da bismo mogli da nacrtamo kosu asimptotu, potrebne su nam koordinate dve tačke kroz koje ona prolazi. Možemo uzeti tačke u kojima kosa asimptota seče ose x i y . Za $x = 0$, $y = 0 - 6 = -6$, a za $y = 0$, $x = 6$. Kosa asimptota prolazi kroz tačke $(0, -6)$, $(6, 0)$.

c) Funkcija $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$ nije definisana u tačkama, $x = -2$, i $x = 2$, pa je oblast definisanosti $Df = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. Ispitaćemo da li funkcija ima vertikalne asimptote u ovim tačkama.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = \begin{cases} x = -2 - h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-2-h)^3}{(-2-h)^2 - 4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-8 - 12h - 6h^2 - h^3)}{4 + 4h + h^2 - 4} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-16 - 24h - 12h^2 - 2h^3}{4h + h^2} = \frac{-16}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = \begin{cases} x = -2 + h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-2+h)^3}{(-2+h)^2 - 4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-8 + 12h - 6h^2 + h^3)}{4 - 4h + h^2 - 4} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-16 - 24h - 12h^2 - 2h^3}{-4h + h^2} = \frac{16}{-0} = +\infty$$

Kako je h mala pozitivna veličina koja teži nuli $-4h + h^2 < 0$, zato ispod razlomačke crte pišemo -0 . Na primer za $h = 0,01$, $-4h + h^2 = -4 \cdot 0,01 + 0,01^2 = -0,04 + 0,0001 = -0,0399$. Dakle prava $x = -2$, je vertikalna asimptota.

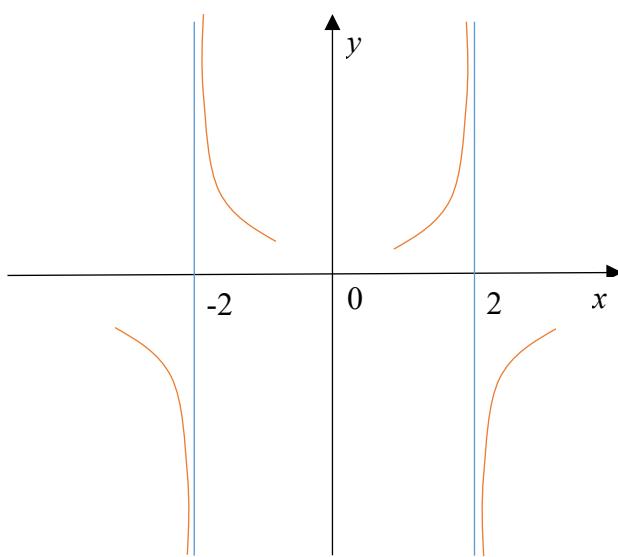
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = \begin{cases} x = 2 - h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2-h)^3}{(2-h)^2 - 4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(8-12h+6h^2-h^3)}{4-4h+h^2-4} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16-24h+12h^2-2h^3}{-4h+h^2} = \frac{16}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = \begin{cases} x = 2 + h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^3}{(2+h)^2 - 4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(8+12h+6h^2+h^3)}{4+4h+h^2-4} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16+24h+12h^2+2h^3}{4h+h^2} = \frac{16}{+0} = +\infty$$

Prava $x = 2$, je takođe vertikalna asimptota. Ova funkcija ima dve vertikalne asimptote. Na slici ispod se vidi kako izgleda grafik funkcije u okolini asimptota.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = \infty$$

Funkcija nema horizontalnu asimptotu. Sada ćemo proveriti da li funkcija ima kosu asimptotu.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x}}{\frac{x^2-4}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3-4x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2-4)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 8x}{x^2-4} = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x^2-4} = 0$$

Funkcija ima kosu asimptotu $y = 2x$. Za dve tačke kroz koje prolazi grafik funkcija, možemo uzeti koordinatni početak $(0, 0)$ i tačku $(1, 2)$.

4. Ispitati neprekidnost funkcije:

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & \text{za } x > -1 \\ \frac{1}{x}, & \text{za } x \leq -1 \end{cases} \quad \text{u tački } x = -1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{za } x < 1 \\ x^2 + x + 1, & \text{za } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{u tački } x = -1$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{2x+5}{3}, & \text{za } x \leq 2 \\ x^2 - 1, & \text{za } x \in (2,3) \\ e^{x-2}, & \text{za } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{u tačkama } x = 2 \text{ i } x = 3.$$

Rešenje.

Da bi funkcija bila neprekidna u nekoj tački a , neophodno je da limesi sa leve i sa desne strane te tačke budu jednaki samoj vrednosti funkcije u toj tački, tj

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & \text{za } x > -1 \\ \frac{1}{x}, & \text{za } x \leq -1 \end{cases}$$

$$f(-1) = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x + 5) = 2 \cdot (-1) + 5 = 3$$

Funkcija je definisana u tački $x = 1$, ali se levi i desni limes razlikuju, pa ova funkcija ima prekid u tački $x = 1$.

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{za } x < 1 \\ x^2 + x - 1, & \text{za } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{u tački } x = 1$$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x + 1) = 1^2 - 1 + 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x - 1) = 1^2 + 1 - 1 = 1$$

Ova funkcija je neprekidna u tački $x = 1$, jer je $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 5}{3}, & \text{za } x \leq 2 \\ x^2 - 1, & \text{za } x \in (2, 3) \\ e^{x-2}, & \text{za } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(2) = \frac{2 \cdot 2 + 5}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 5}{3} = \frac{9}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3$$

Funkcija je definisana u tački $x = 2$, ali se levi i desni limes razlikuju, pa ova funkcija ima prekid u tački $x = 2$.

$$f(3) = e^{3-2} = e^1 = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 1) = 3^2 - 1 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} e^{x-2} = e^{3-2} = e$$

I ovde je funkcija definisana u tački $x = 3$, ali se levi i desni limes razlikuju, pa funkcija ima prekid i u tački $x = 3$.

5. Odrediti asimptote funkcije:

$$a) f(x) = \frac{x-1}{x+2}, \quad b) f(x) = \frac{x^2+6x-7}{x-2}, \quad c) f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2+1}$$

$$d) f(x) = x - \frac{1}{x}, \quad e) f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

$$a) f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

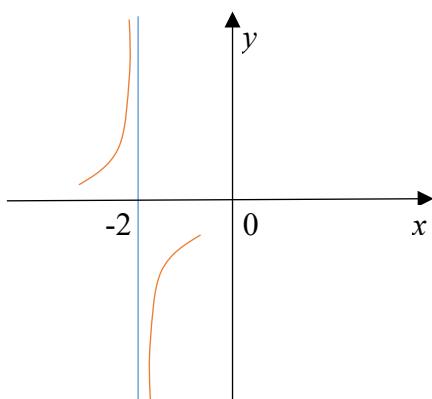
Oblast definisanosti funkcije je $Df = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

Tražimo graničnu vrednost funkcije u tački u kojoj funkcija nije definisana i to i sa leve i sa desne stranene.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-1}{x+2} = \begin{cases} \text{uvodimo smenu } x = -2 - h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2-h-1}{-2-h+2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-3}{-h} = \frac{-3}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x+2} = \begin{cases} \text{uvodimo smenu } x = -2 + h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2+h-1}{-2+h+2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-3}{h} = \frac{-3}{0} = -\infty$$

Da bi u tački u kojoj funkcija nije definisana postojala asimptota, potrebno je da se za graničnu vrednost dobije $+\infty$ ili $-\infty$. Taj uslov je ispunjen u primeru, što znači da funkcija ima vertikalnu asimptotu u tački -2 . To je prava koja je paralelna y -osi i prolazi kroz tačku -2 , na x -osi. Iz znaka koji stoji ispred ∞ u graničnoj vrednosti možemo videti gde se kako grafik funkcije izgleda u okolini asimptote. **Horizontalan asimptota** je prava $x = -2$



Proveravamo da li funkcija ima horizontalnu asimptotu, tako što tražimo limes funkcije $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Ako limes postoji i ako jeste konačan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, onda je prava $y = b$ horizontalna asimptota. To je prava koja je paralelna sa x-osom i prolazi kroz tačku b na y-osi.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{1} = 1$$

Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 1$. Kada postoji horizontalna asimptota, ne postoji kosa.

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 2}$$

Oblast definisanosti funkcije je $Df = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Tražimo graničnu vrednost funkcije u tački u kojoj funkcija nije definisana i to i sa leve i sa desne strane.

Rešenje.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 2} = \begin{pmatrix} \text{uvodimo smenu } x = 2 - h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{pmatrix} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-h)^2 + 6(2-h) - 7}{2-h-2} =$$

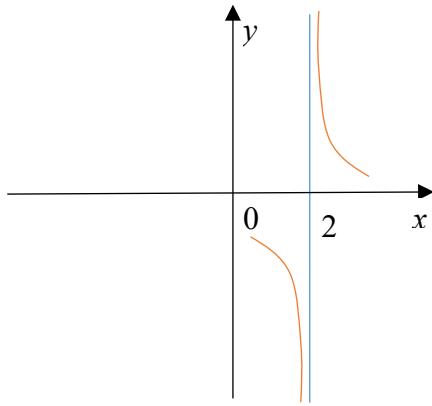
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 + 12 - 6h - 7}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 10h - 3}{-h} = \frac{9}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 2} = \begin{pmatrix} \text{uvodimo smenu } x = 2 + h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{pmatrix} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 + 6(2+h) - 7}{2+h-2} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 12 + 6h - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 10h - 3}{h} = \frac{9}{0} = +\infty$$

Da bi u tački u kojoj funkcija nije definisana postojala asimptota, potrebno je da se graničnu vrednost dobije $+\infty$ ili $-\infty$. Taj uslov je ispunjen u primeru što znači da funkcija ima vertikalnu asimptotu u tački 2. To je prava koja je paralelna y-osi i prolazi kroz tačku 2, na x-osi. Na osnovu znaka koji стоји испред ∞ у граничној вредности можемо видети где се како график функције изгледа у околини асимптоте.

Horizontalan asimptota je prava $x = 2$



Proveravamo da li funkcija ima horizontalnu asimptotu, tako što tražimo limes funkcije $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Ako limes postoji i ako jeste konačan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, onda je prava $y = b$ horizontalna asimptota. To je prava koja je paralelna sa x-osom i prolazi kroz tačku b na y-osi.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 2} = \infty$$

jer je najviši stepen u brojiocu veći od navišeg stepena u imeniocu.

Sada proveravamo da li postoji kosa asimptota $y = ax + b$.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+6x-7}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+6x-7}{x}}{\frac{x-2}{1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x - 7}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 2x} = \\ = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 6x - 7}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x - 7 - x(x-2)}{x-2} = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x - 7 - x^2 + 2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x - 7}{x-2} = \frac{8}{1} = 8$$

Dakle, postoji **kosa asimptota $y = x + 8$** . Trabaju nam dve tačke kroz koje ona prolazi, da bismo mogli da je nacrtamo. Za $x = 0$, $y = 8$, a za $x = -8$, $y = 0$. Kosa asimptota prolazi kroz tačke $(0, 8)$ i $(-8, 0)$.

c) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$

$x^2 + 1 \neq 0$ za svaki realan broj x , pa je oblast definisanosti ceo skup realnih brojeva.

$Df = R = (-\infty, +\infty)$. Ova funkcija nema tačke prekida, pa nema ni vertikalnu asimptotu.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 1$. Kada postoji horizontalna asimptota, ne postoji kosa.

$$d) f(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$$

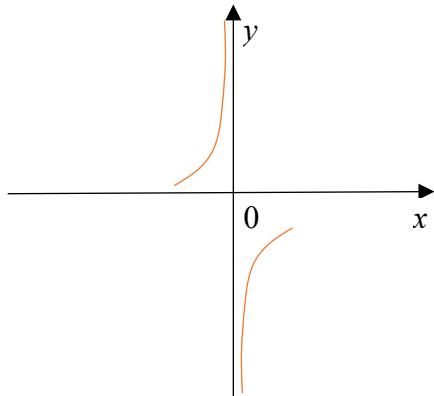
Funkcija nije definisana u tački $x = 0$. $Df = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Tražimo graničnu vrednost funkcije u tački u kojoj funkcija nije definisana i to i sa leve i sa desne strane.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x} = \begin{cases} \text{uvodimo smenu } x = 0 - h = -h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-h)^2 - 1}{-h} = \frac{-1}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x} = \begin{cases} \text{uvodimo smenu } x = 0 + h = h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 1}{h} = \frac{-1}{+0} = -\infty$$

Horizontalan asimptota je prava $x = 0$, a to je y osa. Ovako izgleda grafik funkcije u okolini vertikalne asimptote.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \infty, \text{ funkcija nema horizontalnu asimptotu.}$$

Sada proveravamo da li funkcija ima kosu asimptotu.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{x} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} = 0$$

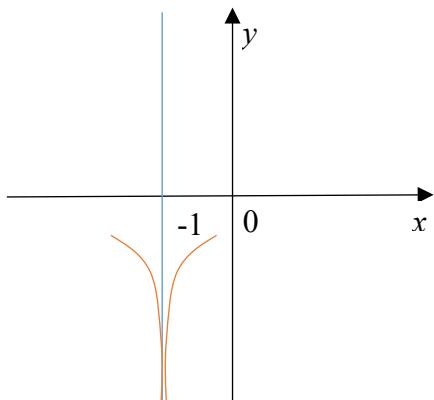
Postoji **kosa asimptota** $y = x$. Ona prolazi kroz tačke $(0,0)$ i $(1,1)$.

$$e) f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

$Df = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ Funkcija nije definisana u tački $x = -1$, pa ćemo proveriti da li ima vertikalnu asimptotu u toj tački.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} &= \begin{cases} \text{uvodimo smenu } x = -1 - h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1-h)^3}{2(-1-h+1)^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1-h)^3}{2h^2} = \frac{-1}{+0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} &= \begin{cases} \text{uvodimo smenu } x = -1 + h \\ h > 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^3}{2(-1-h+1)^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^3}{2h^2} = \frac{-1}{+0} = -\infty \end{aligned}$$

Prava $x = -1$ je **vertikalna asimptota**. U okolini vertikalne asimptote grafik funkcije izgleda ovako:



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \infty \quad \text{Funkcija nema horizontalnu asimptotu. Tražimo kosu asimptotu.}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x(x^2+2x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^3 + 4x^2 + 2x} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x^2 + 2x + 1)}{2(x^2 + 2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{2x^3 + 4x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - x}{2x^3 + 4x^2 + 2x} = 0
\end{aligned}$$

jer je stepen u brojiocu manji od stepena u imeniocu.

Funkcija ima **kosu asimptotu**

$$y = \frac{1}{2}x + 0 = \frac{x}{2}$$

i ona prolazi kroz tačke $(0, 0)$ i $(2, 1)$.