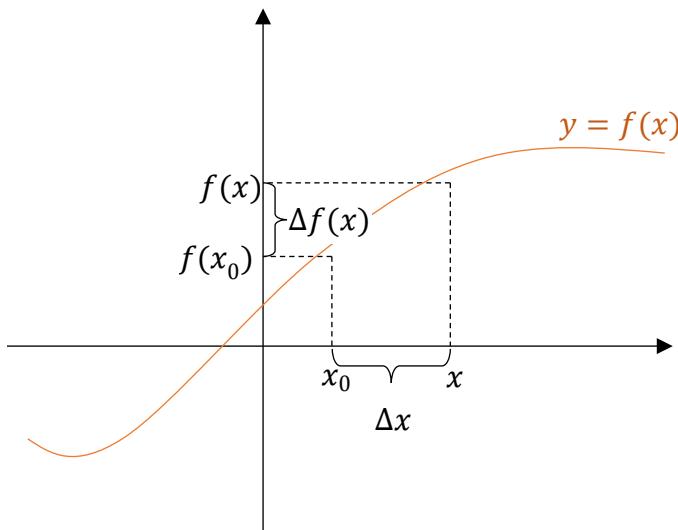


## 4 IZVOD FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE

Neka je  $f : A \rightarrow R$ ,  $A \subseteq R$  i  $x_0$  tačka skupa  $A$  ( $f$  je realna funkcija a  $x_0$  tačka koja pripada oblasti definisanosti). Sa  $U(x_0)$  obeležavamo okolinu tačke  $x_0$ . Neka je  $x$  proizvoljna tačka iz  $U$ -okoline tačke  $x_0$ ,  $x \in U(x_0)$ ,  $x \neq x_0$ . Sa  $\Delta x$  označavamo priraštaj argumenta  $\Delta x = x - x_0$  a sa  $\Delta f(x)$  (ili  $\Delta y$ ) priraštaj funkcije  $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ .



Količnik  $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$  predstavlja brzinu promene vrednosti funkcije u odnosu na promenu vrednosti argumenta. Ukoliko se promena smanjuje, odnosno ukoliko teži nuli, ovaj količnik se naziva izvod funkcije u tački  $x_0$ .

**Definicija 1.** Neka je  $f : A \rightarrow R$ ,  $A \subseteq R$  i neka je  $U(x_0)$  okolina tačke  $x_0 \in A$ . Neka je  $x \in U(x_0)$ ,  $x \neq x_0$  i  $x = x_0 + \Delta x$ . **Prvi izvod funkcije**  $f$  u tački  $x_0$  u oznaci  $f'(x_0)$ , je granična vrednost

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ako ona postoji i ako je konačna.

Kako je  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \Delta f(x)$ , prvi izvod funkcije  $f$  možemo definisati i kao graničnu vrednost količnika priraštaja funkcije  $\Delta f(x)$  i priraštaja argumenta  $\Delta x$  što zapisujemo  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ .

Iz  $x = x_0 + \Delta x$ , kad  $\Delta x \rightarrow 0$  onda  $x \rightarrow x_0$  pa prvi izvod funkcije možemo zapisati u obliku

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ako funkcija  $f$  ima prvi izvod u tački  $x_0$ , onda kažemo da je ona **diferencijabilna u tački  $x_0$** .

Neka je  $(a, b) \subset A$ . Ako je funkcija  $f$  diferencijabilna u svakoj tački intervala  $(a, b)$  onda se kaže da je funkcija  $f$  **diferencijabilan na intervalu  $(a, b)$** . Funkciju  $f'(x)$  nazivamo **izvodna funkcija**, a postupak određivanja izvodne funkcije nazivamo **diferenciranje**.

**Primer 1.** Na osnovu definicije izvoda nađi izvod funkcije  $f(x) = \sqrt{x}$ , za  $x \in [0, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

**Teorema 1.** (o odnosu neprekidnih i diferencijabilnih funkcija)

Neka je  $f : A \rightarrow R$ ,  $A \subseteq R$  i  $U(x_0)$  okolina tačke  $x_0$  i neka  $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ . Ako je funkcija  $f$  diferencijabilna u tački  $x_0$ , onda je ona i neprekidna u toj tački.

#### 4.1 Izvodi nekih elementarnih funkcija

1.  $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x \end{aligned}$$

Za izračunavanje ove granične vrednosti upotrebljena je formula za transformisanje razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod trigonometrijskih funkcija

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ i karakteristična granična vrednost}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2.  $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \\ &= \begin{cases} t = \frac{x}{\Delta x} \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \end{cases} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{\frac{t}{x}} = \ln \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t \right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ovde je upotrebljena karakteristična granična vrednost  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

Na osnovu definicije, može sa odrediti izvod svake funkcije. U tabeli ispod, data je tablica izvoda nekih osnovnih funkcija, a u nastavku i pravila pomoću kojih se lakše određuje izvod funkcije u odnosu na postupak na osnovu definicije, određivanje granične vrednosti.

## Tablica izvoda

$$(1) (c)' = 0, c = \text{const. } c \in R$$

$$(2) (x^n)' = nx^{n-1}, n \in N$$

$$(3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(4) (e^x)' = e^x, (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(5) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(6) (\sin x)' = \cos x$$

$$(7) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(8) (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(9) (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(10) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(11) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(12) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(13) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

## 4.2 Pravila za diferenciranje

**Teorema 2.** Neka su  $f(x)$  i  $g(x)$  realne funkcije definisane u okolini tačke  $x \in R$  i diferencijabilne u tački  $x$ , i neka su  $a, b \in R$ . Tada su i funkcije  $af(x)$ ,

$f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ,  $g(x) \neq 0$  diferencijabilne u tački  $x$  i pri tom važi

$$(1) (af(x))' = af'(x)$$

$$(2) (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$

$$(3) (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$(4) \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0.$$

### Dokaz.

$$(1) (af(x))' \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{af(x + \Delta x) - af(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} =$$

(prema teoremi o operacijama sa graničnim vrednostima funkcija, konstantu  $a$  možemo staviti ispred  $\lim$ )

$$= a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = af'(x) \quad (\text{prema definiciji izvoda funkcije})$$

$$(2) \quad (f(x) + g(x))' \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$$

$$(3) \quad (f(x) \cdot g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

(dodajemo i oduzimamo  $f(x + \Delta x) \cdot g(x)$ )

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot (f(x + \Delta x) - f(x)) + f(x + \Delta x) \cdot (g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x} =$$

$$= g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

### **Primer 2.**

$5' = 0$ ,  $100' = 0$ ,  $-1000' = 0$   $e' = 0$  izvod od bilo kog broja je 0.

$x' = 1$ , zato što  $x$  možemo napisati kao  $x^1$  i kad primenimo pravilo (2) dobijamo da je

$$x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$$

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$$

$$(3x^2)' = 3 \cdot (x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$$

$$(5 \sin x)' = 5(\sin x)' = 5 \cos x$$

Ovde smo primenili pravilo (1), kad imamo proizvod broja i funkcije, broj prepišemo, a tražimo samo izvod funkcije.

**Primer 3.** Naći izvod funkcija

a)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 7$

Ovde ćemo primeniti osim pravila (1) i pravilo (2) po kojem se izvod od zbiru funkcija određuje tako što se traži posebno izvod od svakog od sabiraka.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 2x^2 + 3x - 7)' = (x^3)' - (2x^2)' + (3x)' - (7)' = \\ &= 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3 = 3x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

b)  $f(x) = x \cdot \sin x$

Ovde primenjujemo pravilo (3) za izvod od proizvoda funkcija.

$$f'(x) = (x \cdot \sin x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot \sin' x = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$$

c)  $f(x) = \frac{e^x}{x}$

Ovde primenjujemo pravilo (4) za izvod količnika dve funkcije

$$f'(x) = \left( \frac{e^x}{x} \right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot x'}{x^2} = \frac{e^x x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$$

d)  $f(x) = \operatorname{tg} x$

Primenom pravila (4) možemo doći do tabličnog izvoda funkcije  $\operatorname{tg} x$  koristeći

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{tg}' x = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

na osnovu trigonometrijskog identita  $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

**Teorema 3. (Izvod složene funkcije)** Neka je funkcija  $f$  diferencijabilna u tački  $x$  i neka je funkcija  $g$  diferencijabilna u tački  $f(x)$ . Onda je funkcija  $h = g \circ f$  takođe diferencijabilna u tački  $x$  i važi formula

$$h'(x) = ((g \circ f)(x))' = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

**Primer 4.** Naći izvod funkcije

$$a) \ y = \ln(1+x^2)$$

U ovom slučaju je  $y = g(f(x))$ , gde je  $g(x) = \ln x$  a  $f(x) = 1+x^2$ . Pa je

$$y' = (\ln(1+x^2))' \cdot (1+x^2)' = \frac{1}{1+x^2} (1+x^2)' = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$b) \ y = \cos(1+3x)$$

Izvod složene funkcije možemo tražiti i uvođenjem smene  $t = 1+3x$ , odakle je  $y = \cos t$  a

$$y' = (\cos t)' \cdot t' = (\sin t) \cdot t' = (\sin(1+3x)) \cdot (1+3x)' = (\sin(1+3x)) \cdot 3 = 3\sin(1+3x)$$

$$c) \ y = \arcsin x .$$

Funkcija  $\arcsin x$  je inverzna funkciji  $\sin x$ , pa odavde sledi  $x = \sin y$ .

Diferenciranjem leve i desne strane dobijamo

$$x' = (\sin y)'$$

primenjujemo pravilo za diferenciranje složene funkcije

$$1 = \sin' y \cdot y'$$

$$1 = \cos y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Odnosno  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Dobili smo još jedan tablični izvod.

### n-ti izvod funkcije

Ako je funkcija  $f'(x)$  diferencijabilna u tački  $x$ , onda se izvod funkcije  $f'(x)$  naziva **drugi izvod funkcije**  $f(x)$  i označava  $f''(x) = f^{(2)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'$ . Analogno se definiše

**n-ti izvod funkcije**  $f^{(n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(n-1)}(x))'$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  .

**nulti izvod funkcije**  $f(x)$  je po definiciji  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

**Primer 5.** Naći  $n$ -ti izvod funkcije  $y = \frac{1}{1-x}$ . Ovu funkciju možemo zapisati i u obliku

$$y = (1-x)^{-1} \quad y' = -(1-x)^{-2} (1-x)' = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = ((1-x)^{-2})' = -2(1-x)^{-3} (1-x)' = 2(1-x)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$y''' = (2(1-x)^{-3})' = 2 \cdot (-3) \cdot (1-x)^{-4} (1-x)' = 2 \cdot 3(1-x)^{-4} = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}$$

Odavde možemo izvući zaključak da je  $n$ -ti izvod funkcije  $y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ .

## IZVOD FUNKCIJE – VEŽBE

**NAPOMENA:** Najpre pogledajte i pokušajte da shvatite primere sa predavanja. Tamo su dati najlakši primeri. Zatim proradite primere sa vežbi. Da biste shvatili, nije dovoljno samo da ih pogledate, već onda kad mislite da su vam jasni, probajte da ih rešite sami, ne gledajući rešenje. Tek kad završite, uporedite sa rešenjem. Kad ste to uspešno prošli, pređite na zadatke za samostalno vežbanje. Naravno, za sve što vam nije jasno možete da mi se javite.

1. Odredi izvod sledećih funkcija

$$a) f(x) = 2\sin x + \frac{3}{x^3} - 5 \ln x, \quad b) f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x, \quad c) f(x) = 4\sqrt{x^3} + 2\sqrt[3]{x^2},$$

$$d) f(x) = \frac{x^3}{2x+1}, \quad e) f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x+2}$$

Za ove zadatke ćemo koristiti sledeća svojstva

$$\boxed{\frac{1}{x^p} = x^{-p}}, \quad \boxed{\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}}, \quad \boxed{\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}}, \quad \boxed{\sqrt[q]{x^q} = x^q}$$

**Rešenje.**

$$a) f'(x) = \left( 2 \sin x + \frac{3}{x^3} - 5 \ln x \right)' = 2 \cdot (\sin x)' + 3 \cdot (x^{-3})' - 5 \cdot (\ln x)' =$$

$$= 2 \cos x + 3 \cdot (-3x^{-3-1}) - 5 \frac{1}{x} = 2 \cos x - 9x^{-4} - \frac{5}{x} = 2 \cos x - \frac{9}{x^4} - \frac{5}{x}$$

$$b) f'(x) = (\sqrt{x})' \cdot \cos x + \sqrt{x}(\cos x)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \sqrt{x}(-\sin x) = -\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin x$$

$$c) f'(x) = (4\sqrt{x^3} + 2\sqrt[3]{x^2})' = 4\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' + 2\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = 4x^{\frac{3}{2}-1} + 2x^{\frac{2}{3}-1} = 4x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= 4\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

$$d) f'(x) = \left( \frac{x^3}{2x+1} \right)' = \frac{(x^3)'(2x+1) - x^3(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{3x^2(2x+1) - x^3 \cdot 2}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{6x^3 + 3x^2 - 2x^3}{(2x+1)^2} = \frac{4x^3 + 3x^2}{(2x+1)^2}$$

$$e) f'(x) = \left( \frac{x^2 - 4x + 5}{x+2} \right)' = \frac{(x^2 - 4x + 5)'(x+2) - (x^2 - 4x + 5)(x+2)'}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{(2x-4)(x+2) - (x^2 - 4x + 5) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 4x - 8 - x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 4x - 13}{(x + 2)^2}$$

2. Odrediti izvode sledećih složenih funkcija

$$a) y = \cos(-x), b) y = \sin(2x + 1), c) y = (1 - x)^2, d) y = (x^3 + 2x - 5)^2,$$

$$e) y = \sqrt{\frac{2x+1}{1-x}}, \quad f) y = \frac{2x^3}{x^2-4}, \quad g) y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}, \quad h) y = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

**Rešenje.**

a)  $y = \cos(-x)$  Za funkciju  $\cos x$  postoji izvod u tablici. Međutim, ovde kao argument imamo  $-x$ , i to više nije tablični izvod. Izvodi šložene funkcije najlakše se nalaze pomoću smene. Pošto ovde kao argument funkcije imamo  $-x$ , uvodimo smenu  $t = -x$ . Umesto  $y = \cos(-x)$ , pišemo  $y = \cos t$ . Moramo voditi računa da je  $y' = (\cos t)'t'$ , prema pravilu za izvod složene funkcije.

$$t = -x = -1 \cdot x$$

$$t' = -1$$

$$y' = (-\sin t) \cdot (-1) = \sin t. \text{ Sada umesto } t \text{ vraćamo } -x \text{ i dobijamo}$$

$$y' = \sin(-x) = -\sin x$$

$$b) y = \sin(2x + 1)$$

$$t = 2x + 1, t' = (2x + 1)' = 2, \quad y = \sin t$$

$$y' = (\sin t)'t' = (\cos t) \cdot 2 = 2 \cos t = 2 \cos(2x + 1)$$

$$c) y = (1 - x)^2$$

$$t = 1 - x, \quad t' = -1, \quad y = t^2, \quad y' = (t^2)'t' = 2t \cdot (-1) = -2t = -2(1 - x)$$

$$d) y = (x^3 + 2x - 5)^2$$

$$t = x^3 + 2x - 5, \quad t' = 3x^2 + 2$$

$$y = t^2, \quad y' = (t^2)'t' = 2tt' = 2(x^3 + 2x - 5)(3x^2 + 2)$$

$$e) y = \sqrt{\frac{2x+1}{1-x}}$$

$$t = \frac{2x+1}{1-x}$$

Da bismo izračunali  $t'$  moramo da primenimo pravilo za izvod količnika, koje može da se zapiše jednostavno ovako:

$$\text{ako je } y = \frac{u}{v}, \text{ onda je } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

U našem slučaju  $u = 2x + 1$ , a  $v = 1 - x$ , pa je  $u' = 2$ ,  $v' = -1$

Primenom formule dobijamo

$$t' = \frac{2 \cdot (1-x) - (2x+1) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2-2x+2x+1}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

$$y = \sqrt{t}, \quad y' = (\sqrt{t})' t' = \frac{1}{2\sqrt{t}} t' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+1}{1-x}}} \frac{3}{(1-x)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{2x+1}} \frac{3}{(1-x)^2}$$

$$f) y = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$$

$$y' = \frac{(2x^3)'(x^2 - 4) - 2x^3(x^2 - 4)'}{(x^2 - 4)^2} = \frac{6x^2(x^2 - 4) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{6x^4 - 24x^2 - 4x^4}{(x^2 - 4)^2} = \\ = \frac{2x^4 - 24x^2}{(x^2 - 4)^2}$$

$$g) y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$$

$$y' = \frac{((x-1)^3)'(x-2)^2 - (x-1)^3((x-2)^2)'}{((x-2)^2)^2}$$

ili možemo uvesti smenu  $u = (x-1)^3, v = (x-2)^2$ . I  $u$  i  $v$  su složene funkcije, pa ako

uvedemo smenu  $t = x-1, t' = 1$ , imamo  $u = t^3, u' = (t^3)'t' = 3t^2 \cdot 1 = 3(x-1)^2$

$$z = x-2, z' = 1, v = z^2, v' = (z^2)'z' = 2zz' = 2(x-2) \cdot 1 = 2(x-2)$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3(x-1)^2(x-2)^2 - (x-1)^3 \cdot 2(x-2)}{((x-2)^2)^2} = \\ = \frac{(x-1)^2(x-2)(3(x-2) - 2(x-1))}{(x-2)^4} = \frac{(x-1)^2(3x-6-2x+2)}{(x-2)^3} = \\ = \frac{(x-1)^2(x-4)}{(x-2)^3}$$

$$h) y = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

$$y = \frac{u}{v}, \quad u = x^3, u' = 3x^2, v = (1-x)^2, \text{ uvodimo smenu } t = 1-x, t' = -1, v = t^2,$$

$$v' = (t^2)'t' = 2tt' = 2(1-x) \cdot (-1) = -2(1-x)$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3x^2(1-x)^2 - x^3 \cdot (-2(1-x))}{((1-x)^2)^2} = \frac{x^2(1-x)(3(1-x) + 2x)}{(1-x)^4} = \\ = \frac{x^2(3-3x+2x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$$

3. Odrediti prvi i drugi izvod funkcije

$$a) y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}, \quad b) y = \frac{(x - 1)^2}{-x^2 + 2x + 8}, \quad c) y = \frac{2x^2 - 1}{(x - 1)^2}$$

$$u = x^2 - x + 1, u' = 2x - 1, v = x - 1, v' = 1$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 1}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \\ y'' &= (y')' = \left( \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \right)' \end{aligned}$$

$$u = x^2 - 2x, u' = 2x - 2 = 2(x - 1), v = (x - 1)^2 \text{ uvodimo smenu } t = x - 1, t' = 1,$$

$$v = t^2, v' = 2tt' = 2(x - 1) \cdot 1 = 2(x - 1)$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{2(x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - 2x)2(x - 1)}{((x - 1)^2)^2} = \frac{2(x - 1)((x - 1)^2 - (x^2 - 2x))}{(x - 1)^4} = \\ &= \frac{2(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x)}{(x - 1)^3} = \frac{2}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

$$\boxed{y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}} \quad \boxed{y'' = \frac{2}{(x - 1)^3}}$$

$$b) y = \frac{(x - 1)^2}{-x^2 + 2x + 8}$$

$$u = (x - 1)^2, u' = 2(x - 1), v = -x^2 + 2x + 8, v' = -2x + 2 = -2(x - 1)$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2(x - 1)(-x^2 + 2x + 8) - (x - 1)^2(-2(x - 1))}{(-x^2 + 2x + 8)^2} = \\ &= \frac{2(x - 1)[-x^2 + 2x + 8 + (x - 1)^2]}{(-x^2 + 2x + 8)^2} = \frac{2(x - 1)[-x^2 + 2x + 8 + x^2 - 2x + 1]}{(-x^2 + 2x + 8)^2} = \\ &= \frac{18(x - 1)}{(-x^2 + 2x + 8)^2} \\ y'' &= (y')' = \left( \frac{18(x - 1)}{(-x^2 + 2x + 8)^2} \right)' = 18 \left( \frac{x - 1}{(-x^2 + 2x + 8)^2} \right)' \end{aligned}$$

$$u = x - 1, u' = 1, v = (-x^2 + 2x + 8)^2, \text{ uvodimo smenu } t = -x^2 + 2x + 8, t' = -2x + 2$$

$$v = t^2, v' = 2tt' = 2(-x^2 + 2x + 8)(-2x + 2)$$

$$\begin{aligned} y'' &= 18 \frac{1 \cdot (-x^2 + 2x + 8)^2 - (x - 1)2(-x^2 + 2x + 8)(-2x + 2)}{((-x^2 + 2x + 8)^2)^2} = \\ &= 18 \cdot \frac{(-x^2 + 2x + 8)[-x^2 + 2x + 8 - 2(x - 1) \cdot (-2) \cdot (x - 1)]}{(-x^2 + 2x + 8)^4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 18 \cdot \frac{-x^2 + 2x + 8 + 4(x-1)^2}{(-x^2 + 2x + 8)^3} = 18 \cdot \frac{-x^2 + 2x + 8 + 4x^2 - 8x + 4}{(-x^2 + 2x + 8)^3} = \\
&= 18 \cdot \frac{3x^2 - 6x + 12}{(-x^2 + 2x + 8)^3} = \frac{18 \cdot 3(3x^2 - 2x + 4)}{(-x^2 + 2x + 8)^3} = \frac{54(3x^2 - 2x + 4)}{(-x^2 + 2x + 8)^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{y' = \frac{18(x-1)}{(-x^2 + 2x + 8)^2}} \quad \boxed{y'' = \frac{54(3x^2 - 2x + 4)}{(-x^2 + 2x + 8)^3}}$$

$$c) \ y = \frac{2x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$u = 2x^2 - 1, u' = 4x, v = (x-1)^2$ , ovde uvodimo smenu  $t = x-1, t' = 1, v = t^2$ ,

$$v' = 2tt' = 2(x-1) \cdot 1 = 2(x-1)$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{4x(x-1)^2 - (2x^2 - 1)2(x-1)}{((x-1)^2)^2} = \frac{2(x-1)[2x(x-1) - (2x^2 - 1)]}{(x-1)^4} = \\
&= \frac{2[2x^2 - 2x - 2x^2 + 1]}{(x-1)^3} = \frac{2(1-2x)}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

$$y'' = (y')' = \left( \frac{2(1-2x)}{(x-1)^3} \right)' = 2 \left( \frac{1-2x}{(x-1)^3} \right)'$$

$u = 1 - 2x, u' = -2, v = (x-1)^3$ , uvodimo smenu  $t = x-1, t' = 1, v = t^3$ ,

$$v' = 3t^2t' = 3(x-1)^2 \cdot 1 = 3(x-1)^2$$

$$\begin{aligned}
y'' &= 2 \frac{-2(x-1)^3 - (1-2x) \cdot 3(x-1)^2}{((x-1)^3)^2} = 2 \frac{(x-1)^2[-2(x-1) - 3(1-2x)]}{(x-1)^6} = \\
&= 2 \frac{-2x+2-3+6x}{(x-1)^4} = 2 \frac{4x-1}{(x-1)^4} = \frac{2(4x-1)}{(x-1)^4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{y' = \frac{2(1-2x)}{(x-1)^3}} \quad \boxed{y'' = \frac{2(4x-1)}{(x-1)^4}}$$

## IZVOD FUNKCIJE – vežbe

1. Odredi izvod funkcije:

$$\begin{aligned} a) f(x) &= x^4 - \cos x + 2\sqrt{x}, & b) f(x) &= 2e^x + 3\ln x, & c) f(x) &= 3x^5 - \frac{1}{2x^2} \\ d) f(x) &= e^x \arcsin x, & e) f(x) &= 3\sqrt[3]{x^4} - 2\sqrt{x^3}, & f) f(x) &= x^2 \ln x, & g) f(x) &= \frac{\cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$

2. Odredi izvod složene funkcije:

$$a) y = (1 - x^2)^4, \quad b) y = e^{3x-1}, \quad c) y = \ln(x^3 - 1), \quad d) y = \arctg(1 + x^2).$$

3. Odrediti prvi i drugi izvod funkcije

$$a) y = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}, \quad b) y = \frac{(x + 2)^2}{x^2 + 4x - 5}, \quad c) y = \frac{x^2 + x - 2}{(x + 3)^2}, \quad d) y = \frac{x^3}{x^2 + 12}$$