

## MONOTONOST, KONVEKSNOST I KONKAVNOST FUNKCIJE

### 4. 3 Osnovne teoreme diferencijalnog računa

**Definicija 1.** Neka je  $f : A \rightarrow R$ ,  $A \subseteq R$  funkcija i neka je  $(a, b) \subset A$ , i  $c \in (a, b)$ .

Funkcija  $f$  ima u tački  $c$

- (1) **lokalni maksimum** ako važi  $(\forall x \in (a, b)) f(x) \leq f(c)$
- (2) **lokalni minimum** ako važi  $(\forall x \in (a, b)) f(x) \geq f(c)$ .

**Fermaova teorema.** Neka je  $f : A \rightarrow R$ ,  $A \subseteq R$  funkcija i neka je interval  $[a, b] \subset A$ . Neka je  $c$  tačka intervala,  $c \in (a, b)$  u kojoj funkcija dostiže svoju najveću ili najmanju vrednost. Ako je funkcija  $f$  diferencijabilna u tački  $c$  onda je  $f'(c) = 0$ .

**Dokaz.** Prepostavimo da funkcija u tački  $c$  dostiže svoju najveću vrednost na intervalu  $(a, b)$ .

Prema prethodnoj definiciji to znači da je za svaku tačku  $x$  iz intervala  $(a, b)$ ,  $f(c) \geq f(x)$

odnosno  $f(c) - f(x) \geq 0$ . Ako je  $x \in (a, c)$ , onda je  $c - x > 0$ , pa je  $\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \geq 0$ .

Ako  $x \in (c, b)$ , onda je  $c - x < 0$ , pa je  $\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq 0$ .

Na osnovu ovih zapažanja zaključujemo da je

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \geq 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq 0$$

Ako je funkcija diferencijabilna u tački  $c$  onda postoji granična vrednost

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(c) - f(x)}{c - x}$$

A kako postoji granična vrednost kad  $x \rightarrow c$  onda postoje i leva i desna granična vrednost i one su jednake pa je

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = 0$$

Dokaz je sličan i pri prepostavci da funkcija dostiže svoju najmanju vrednost u tački  $c$ .

**Lagranžova teorema.** Neka je  $f : A \rightarrow R$ ,  $A \subseteq R$  funkcija i neka je interval  $[a, b] \subset A$ . Ako je funkcija  $f$  neprekidna na segmentu  $[a, b]$  i diferencijabilna na intervalu  $(a, b)$ , tada postoji tačka  $c \in (a, b)$  tako da važi

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

### 4.3 Monotonost funkcije

**Definicija 2.** Neka je  $f : A \rightarrow R$ ,  $A \subseteq R$  funkcija i neka je interval  $[a, b] \subset A$ . Funkcija  $f$  je na intervalu  $[a, b]$

- 1) **monotonono rastuća** ako važi  $(\forall x, y \in [a, b])(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$
- 2) **monotonono neopadajuća** ako važi  $(\forall x, y \in [a, b])(x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$
- 3) **monotonono opadajuća** ako važi  $(\forall x, y \in [a, b])(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$
- 4) **monotonono nerastuća** ako važi  $(\forall x, y \in [a, b])(x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$
- 5) **ograđena odozgo** ako postoji realan broj  $M$  takav da važi  $(\forall x \in [a, b])f(x) \leq M$
- 6) **ograđen odozdo** ako postoji realan broj  $m$  takav da važi  $(\forall x \in [a, b])f(x) \geq m$ .

Pomoću prvog izvoda, a na osnovu sledeće teoreme se lakše utvrđuje monotonost funkcije.

**Teorema 1.** Neka je  $f : A \rightarrow R$ ,  $A \subseteq R$  funkcija i neka je interval  $[a, b] \subset A$ . Neka je funkcija  $f(x)$  neprekidna na  $[a, b]$  i diferencijabilna na  $(a, b)$ . Ako je  $(\forall x \in (a, b))f'(x) > 0$  onda je funkcija  $f(x)$  monotono rastuća na intervalu  $[a, b]$ , a ako je  $(\forall x \in (a, b))f'(x) < 0$  onda je funkcija  $f(x)$  monotono opadajuća na intervalu  $[a, b]$ .

**Dokaz.** Prepostavimo da važi  $(\forall x \in (a, b))f'(x) > 0$ . Dokazaćemo da je funkcija  $f(x)$  monotono rastuća na tom intervalu. Neka su  $x, y \in (a, b)$  dve proizvoljne tačke iz intervala  $(a, b)$ , takve da je  $x < y$ . Pošto je  $f(x)$  neprekidna na  $[a, b]$  i diferencijabilna na  $(a, b)$  onda je ona i na intervalu  $(x, y)$  neprekidna i diferencijabilna pa prema Lagranžovoj teoremi postoji tačka  $c \in [x, y]$  tako da važi

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$$

Iz  $x < y$  sledi da je  $y - x > 0$ . Iz pretpostavke teoreme  $(\forall x \in (a, b))f'(x) > 0$  sledi da je i  $f'(c) > 0$ . Kako je  $(y - x) > 0$  i  $f'(c) > 0$  onda je i njihov proizvod veći od nule  $(y - x)f'(c) > 0$ . Odatle dobijamo da je  $f(y) - f(x) > 0$ , odnosno  $f(x) < f(y)$  što po definiciji znači da je funkcija  $f(x)$  monotono rastuća. Slično se dokazuje i da je funkcija monotono opadajuća.

#### 4.4 Ekstremne vrednosti funkcije

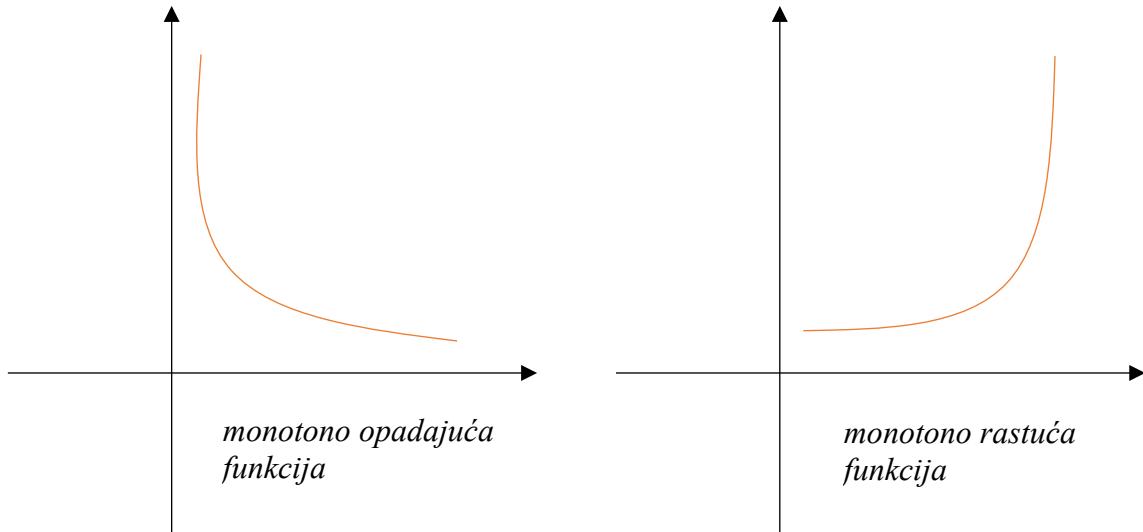
Fermaova teorema daje potreban uslov za postojanje ekstremne vrednosti: ako funkcija u nekoj tački  $c$  ima lokalni minimum ili maksimum onda je  $f'(c) = 0$ . Međutim to nije i dovoljan uslov. Dovoljan uslov za postojanje lokalnog minimuma odnosno maksimuma daje sledeća teorema.

**Teorema 2.** Neka je funkcija  $f(x)$  neprekidna u tački  $x_0$  i diferencijabilna na intervalu  $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ . Ako je

(1)  $((\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))f'(x) > 0) \wedge ((\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))f'(x) < 0)$  tada u tački  $x_0$  funkcija ima lokalni maksimum  $f(x_0)$ .

a, ako je

(2)  $((\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))f'(x) < 0) \wedge ((\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))f'(x) > 0)$  tada u tački  $x_0$  funkcija ima lokalni minimum  $f(x_0)$ .



Moguće je da je u nekoj tački  $c$  prvi izvod  $f'(c) = 0$ , ali da prvi izvod ima isti znak i za manje i za veće vrednosti od  $c$ . U tom slučaju u tački  $c$  ne postoji ekstremna vrednost ali možda postoji prevojna tačka.

Dakle ako je u nekoj tački  $c$ ,  $f'(c) = 0$  i ako u toj tački funkcija menja monotonost onda u toj tački postoji ekstremna vrednost. Ako iz monotono rastuće prelazi u monotono opadajuću, onda u toj tački postoji lokalni maksimum, a ako iz monotono opadajuće prelazi u monotono rastuću, onda u toj tački postoji lokalni minimum.

Ekstremne vrednosti se mogu ispitivati i upotrebom viših izvoda, na koji način saznaćemo iz sledeće teoreme.

**Teorema 3.** Neka funkcija  $f(x)$  ima neprekidni drugi izvod u okolini  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , tačke  $x_0$  i neka je  $f'(x_0) = 0$ .

- (1) Ako je  $f''(x_0) > 0$ , onda funkcija ima lokalni minimum  $f(x_0)$  u tački  $x_0$ .
- (2) Ako je  $f''(x_0) < 0$ , onda funkcija ima lokalni maksimum  $f(x_0)$  u tački  $x_0$ .

**Primer 1.** Ispitati monotonost i odrediti ekstremne vrednosti funkcije  $y = \frac{2x^2-1}{(x-1)^2}$ .

Potrebno je najpre da nađemo prvi izvod funkcije. To smo uradili u okviru prethodnih vežbi.

$$y' = \frac{2(1-2x)}{(x-1)^3}$$

Monotonost funkcije se određuje na osnovu znaka prvog izvoda (funkcije  $y'$ ), a tačke u kojima funkcija možda ima ekstremne vrednosti su nule funkcije (stacionarne tačke).

$y' = 0$ , akko je brojilac jednak 0, tj.  $2(1-2x) = 0$

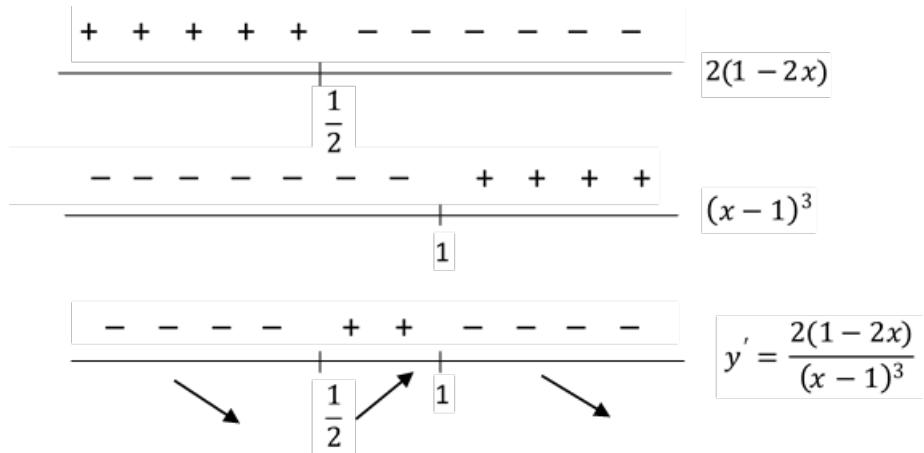
$$\begin{aligned} 2(1-2x) &= 0 \\ 1-2x &= 0 \\ -2x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Za određivanje znaka potrebne su nam i nule izraza u imeniocu.

$$\begin{aligned} (x-1)^3 &= 0 \\ x-1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 1$$

Na osnovu ovoga možemo još zaključiti da je oblast definisanosti  $Df = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



Funkcija je monotono rastuća na intervalu gde je prvi izvod pozitivan, a opadajuća na intervalu gde je prvi izvod negativan. Ova funkcija je monotono opadajuća intervalima  $(-\infty, \frac{1}{2})$  i  $(1, +\infty)$ , a monotono rastuća na intervalu  $(\frac{1}{2}, 1)$ . U tački  $x = \frac{1}{2}$ , funkcija ima nulu prvog izvoda i pošto do te tačke opada, a iza nje raste, funkcija ima u toj tački lokalni minimum. Funkcija takođe menja monotonost i u tački  $x = 1$ , ali ova tačka ne pripada oblasti definisanosti i ona nije nula prvog izvoda, pa u toj tački ne postoje ekstremne vrednosti funkcije. Sada treba još izračunati  $y$  koordinatu tačke minimuma.

$$\text{za } x = \frac{1}{2}, \quad y_{min} = \frac{2x^2 - 1}{(x - 1)^2} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -2$$

Koordinate minimuma su  $P_{min} \left(\frac{1}{2}, -2\right)$ .

Drugi način da se odredi da li funkcija ima u nekoj tački ekstremnu vrednost je preko znaka drugog izvoda ove funkcije u toj tački.

Drugi izvod funkcije je  $y'' = \frac{2(4x-1)}{(x-1)^4}$

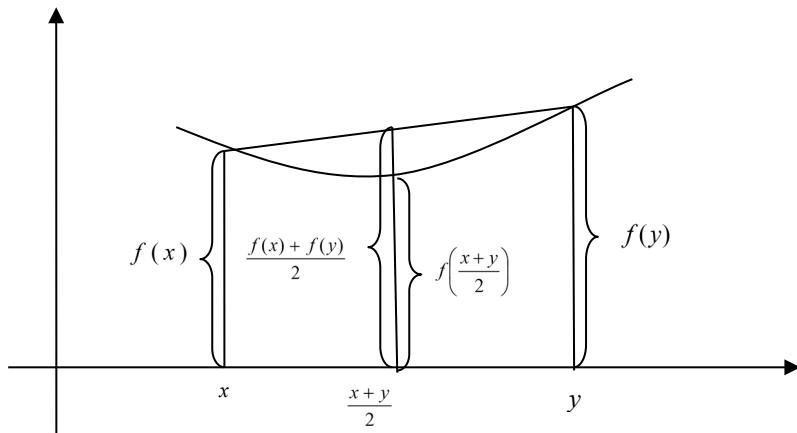
$$\text{za } x = \frac{1}{2}, \quad y'' = \frac{2(4 \cdot \frac{1}{2} - 1)}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^4} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

Dobili smo broj veći od nule, što prema Teoremi 3. znači da funkcija u tački  $x = \frac{1}{2}$  ima lokalni minimum.

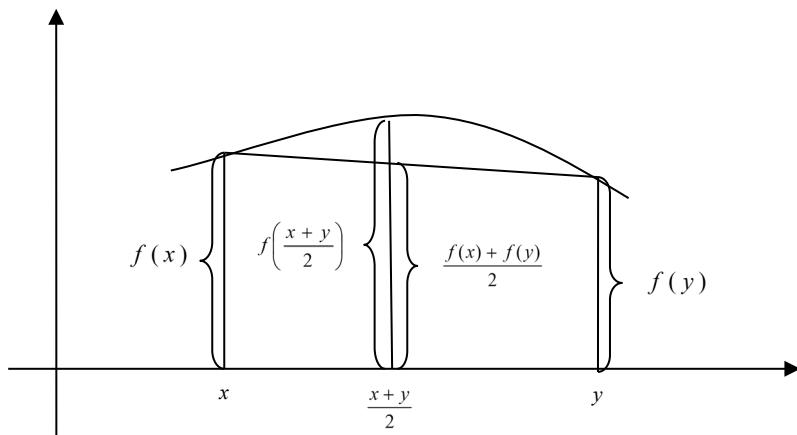
## 4.5 Konveksnost funkcije i prevojne tačke

**Definicija 3.** Neka je  $f : A \rightarrow R$ ,  $A \subseteq R$  funkcija i neka je interval  $[a, b] \subset A$ . Funkcija  $f$  je:

- (1) **konveksna** na intervalu  $[a, b]$  ako važi  $(\forall x, y \in [a, b]) f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$ ;
- (2) **konkavna** na intervalu  $[a, b]$  ako važi  $(\forall x, y \in [a, b]) f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}$ .



Konveksna funkcija



Konkavna funkcija

Ispitivanje konveksnosti i konkavnosti funkcije je mnogo jednostavnije na osnovu znaka drugog izvoda i zaključaka koje nudi sledeća teorema.

**Teorema 4.** Neka funkcija  $f$  ima neprekidan drugi izvod na intervalu  $[a,b]$ . Ako je

- (1)  $(\forall x \in [a,b]) f''(x) > 0$ , funkcija je konveksna na intervalu  $[a,b]$ ,
- (2)  $(\forall x \in [a,b]) f''(x) < 0$ , funkcija je konkavna na intervalu  $[a,b]$ .

**Definicija 4.** Neka je funkcija  $f(x)$  neprekidna u tački  $x_0 \in A$ . Ako u  $x_0$  funkcija menja konveksnost u konkavnost ili obrnuto, onda je tačka  $P(x_0, f(x_0))$  **prevojna tačka** grafika.

**Primer 2.** Ispitati konveksnost i odrediti prevojne tačke funkcije  $y = \frac{2x^2-1}{(x-1)^2}$ .

Za određivanje konveksnosti, konkavnosti i prevojne tačke potreban nam je drugi izvod funkcije.

$$y'' = \frac{2(4x-1)}{(x-1)^4}$$

Treba da odredimo nule i znak drugog izvoda.

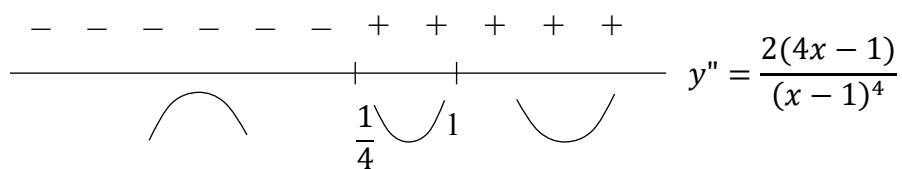
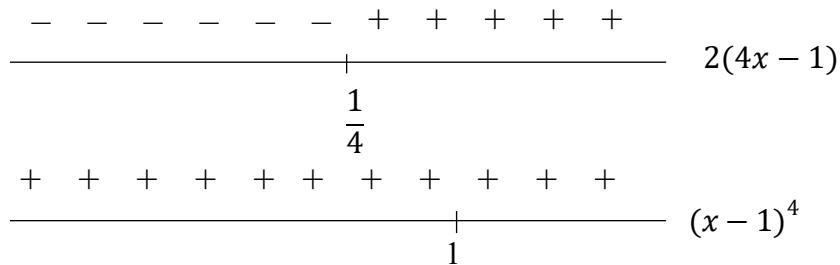
$$2(4x-1) = 0$$

$$4x - 1 = 0$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Možda je ovo prevojna tačka, što zavisi od toga da li drugi izvod menja znak u toj tački.



Interval na kojem je drugi izvod negativan, funkcija je konkavna, a interval na kojem je drugi izvod pozitivan, funkcija je konveksna. Ova funkcija je konkavna na intervalu  $(-\infty, \frac{1}{4})$ , a konveksna na intervalima  $(\frac{1}{4}, 1)$  i  $(1, +\infty)$ . Funkcija nije definisana u tački 1. S obzirom da drugi izvod menja znak u tački  $\frac{1}{4}$ , ova tačka je prevojna tačka i potrebno je još izračunati njenu  $y$  koordinatu.

$$\text{za } x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{2x^2 - 1}{(x - 1)^2} = \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2} = -\frac{14}{9} = -1\frac{5}{9}$$

koordinate prevojne tačke su  $\left(\frac{1}{4}, -1\frac{5}{9}\right)$ .

## MONOTONOST, KONVEKSNOST I KONKAVNOST FUNKCIJE – vežbe

1. Ispitati monotonost, konveksnost i odrediti ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije:

$$a) y = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}, \quad b) y = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4x - 5}, \quad c) y = \frac{x^2 + x - 2}{(x+3)^2}, \quad d) y = \frac{x^3}{x^2 + 12}$$

Za prethodni domaći ste već imali da odredite prvi i drugi izvod ovih funkcija, tako da se sada nećemo baviti traženjem izvoda, već ćemo iskoristiti rešenja, a ovde ćemo se posvetiti monotonosti i konveksnosti.

$$a) y = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}, \quad y' = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}, \quad y'' = \frac{2}{(x - 3)^3}$$

### *monotonost i ekstremne vrednosti*

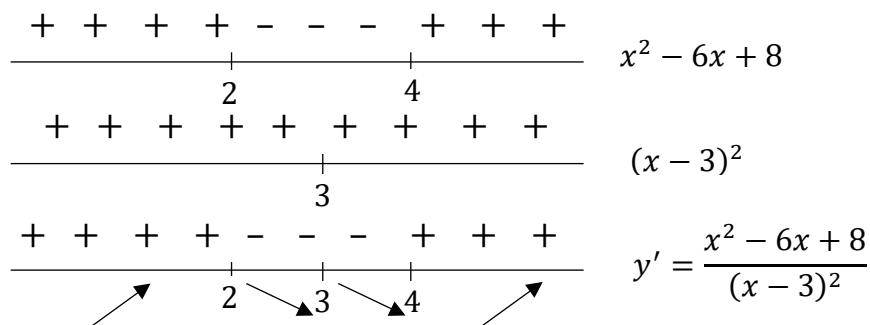
Najpre određujemo nule prvog izvoda

$y' = 0$  ako i samo ako je izraz u brojiocu jednak nuli, tj.  $x^2 - 6x + 8 = 0$ .

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \\ x_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \\ x_1 &= \frac{6 + 2}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{6 - 2}{2} = 2 \end{aligned}$$

Nule prvog izvoda se zovu još i stacionarne tačke.

Sada određujemo znak prvog izvoda.



Funkcija je monotono rastuća na intervalima  $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ , a monotono opadajuća na intervalima  $(2,3) \cup (3, 4)$ . Funkcija u tački  $x = 2$ , menja monotonost iz rastuće u opadajuću, pa u toj tački ima lokalni maksimum. U tački  $x = 4$ , iz opadajuće prelazi u rastuću, pa u toj tački ima lokalni minimum. Sada je potrebno izračunati  $y$ -koordinate tih tačaka.

$$\text{za } x = 2, y_{max} = \frac{2^2 - 8 \cdot 2 + 16}{2 - 3} = -4, \text{ a za } x = 4, y_{min} = \frac{4^2 - 8 \cdot 4 + 16}{4 - 3} = 0$$

$P_{max}(2, -4), P_{min}(4, 0)$

*konveksnost, konkavnost i prevojne tačke*

Najpre određujemo nule drugog izvoda funkcije

$y'' = \frac{2}{(x-3)^3} = 0$  ako i samo ako je izraz u brojiocu jednak nuli. Ovde u brojiocu imamo konstantu 2, pa drugi izvod nikad neće biti jednak 0, tj. **ova funkcija nema prevojne tačke.**

Zatim određujemo znak drugog izvoda funkcije.  $y''$  ima isti znak kao i izraz u imenici  $(x - 3)^3$ .

$$\frac{- - - - - + + +}{\quad \quad \quad 3} \quad y'' = \frac{2}{(x-3)^3}$$

Pomoću znaka drugog izvoda određujemo oblik funkcije. Funkcija je konveksna na intervalu gde je drugi izvod pozitivan  $(3, +\infty)$ , a konkavna na intervalu gde je drugi izvod negativan  $(-\infty, 3)$ . Funkcija menja konveksnost u tački  $x = 3$ , ali ova tačka ne pripada oblasti definisanosti. U toj tački funkcija ima vertikalnu asimptotu.

$$b) \ y = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4x - 5} \quad y' = \frac{-18(x+2)}{(x^2 + 4x - 5)^2} \quad y'' = \frac{54(x^2 + 4x + 7)}{(x^2 + 4x - 5)^3}$$

### ***monotonost i ekstremne vrednosti***

$$y' = 0 \text{ ako i samo ako je } -18(x + 2) = 0$$

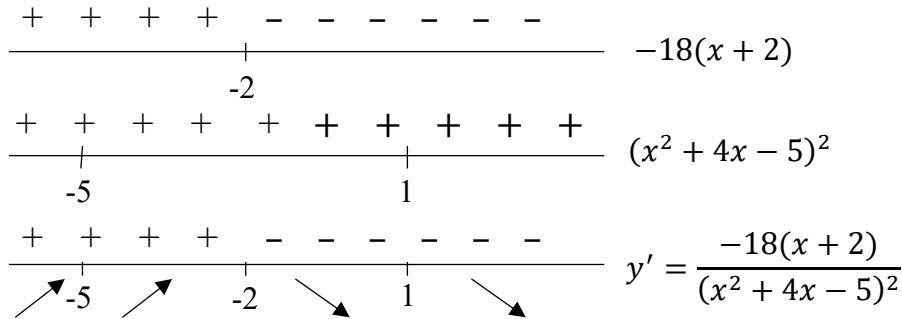
$$-18(x + 2) = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$x = -2$  je nula prvog izvoda funkcije.

U imenici ove funkcije nalazi se izraz  $(x^2 + 4x - 5)^2$ , što znači da je vrednost ovog izraza uvek pozitivna i neće uticati na znak prvog izvoda.  $(x^2 + 4x - 5)^2$  ima dve nule  $x = -5$  i  $x = 1$ .

Kao što se vidi iz slike ispod, znak prvog izvoda funkcije  $y'$  isti je kao i znak izraza  $-18(x + 2)$ .



Funkcija je monotono rastuća na intervalima  $(-\infty, -5) \cup (-5, -2)$ , a monotono opadajuća na intervalima  $(-2, 1) \cup (1, +\infty)$ . U tački  $x = -2$  menja se znak prvog izvoda iz  $+$  u  $-$ , pa u toj tački funkcija ima lokalni maksimum i treba izračunati njegovu  $y$  koordinatu.

$$\text{za } x = -2, y_{max} = \frac{(-2 + 2)^2}{(-2)^2 + 4(-2) - 5} = 0, \quad P_{max}(-2, 0)$$

### *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke*

$$y'' = \frac{54(x^2 + 4x + 7)}{(x^2 + 4x - 5)^3} = 0 \text{ ako i samo ako je } 54(x^2 + 4x + 7) = 0$$

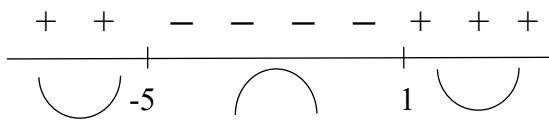
$$54(x^2 + 4x + 7) = 0$$

$$x^2 + 4x + 7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Ova jednačina nema realna rešenja jer je diskriminanta manja od nule ( $D = -12$ ).

Izraz  $x^2 + 4x + 7$  je uvek veći od nule, jer je znak ispred  $x^2$  pozitivan, pa je samim tim i izraz  $54(x^2 + 4x + 7)$  uvek veći od nule. Prema tome **funkcija nema prevojne tačke**. Izraz  $(x^2 + 4x - 5)^3$  ima isti znak kao i izraz  $x^2 + 4x - 5$  jer je na stepen 3 (Izraz na neparni stepen ima isti znak kao i izraz na stepen 1). Prema tome, drugi izvod funkcije će imati isti znak kao i izraz  $x^2 + 4x - 5$ .



Funkcija je konveksna na intervalima  $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$  i konkavna na intervalu  $(-5, 1)$ .

$$c) y = \frac{x^2 + x - 2}{(x+3)^2} \quad y' = \frac{5x+7}{(x+3)^3} \quad y'' = \frac{-2(5x+3)}{(x+3)^4}$$

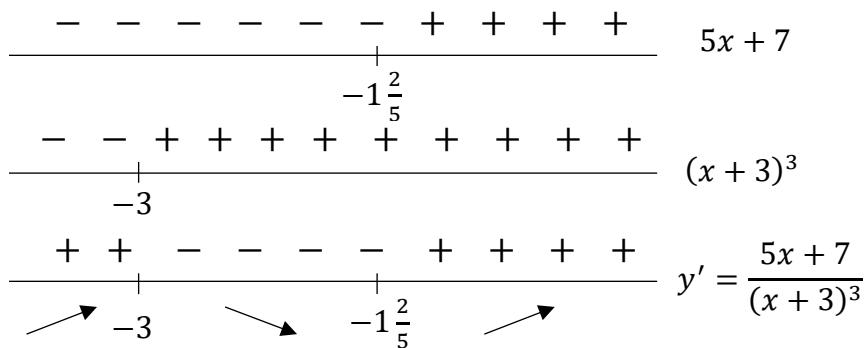
#### *monotonost i ekstremne vrednosti*

$$y' = \frac{5x+7}{(x+3)^3} = 0 \text{ ako i samo ako je } 5x+7=0$$

$$5x+7=0$$

$$5x=-7$$

$$x = -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5} \text{ nula prvog izvoda}$$



Funkcija je monotono rastuća na intervalima  $(-\infty, -3) \cup \left(-1\frac{2}{5}, +\infty\right)$ , monotono opadajuća na intervalu  $\left(-3, -1\frac{2}{5}\right)$ . U tački  $x = -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5}$  funkcija ima lokalni minimum.

$$\text{za } x = -\frac{7}{5} \quad y_{min} = \frac{\left(-\frac{7}{5}\right)^2 - \frac{7}{5} - 2}{\left(-\frac{7}{5} + 3\right)^2} = -\frac{9}{16} \quad P_{min} \left(-\frac{7}{5}, -\frac{9}{16}\right)$$

#### *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke*

$$y'' = \frac{-2(5x+3)}{(x+3)^4} = 0 \text{ ako i samo ako je } -2(5x+3) = 0$$

$$-2(5x+3) = 0$$

$$5x+3 = 0$$

$$5x = -3$$

$$x = -\frac{3}{5} \text{ nula drugog izvoda}$$

Izraz  $(x+3)^4$  je uvek pozitivan jer je na četvrti stepen (Izraz na paran stepen je uvek pozitivan). Znak drugog izvoda je isti kao i znak izraza  $-2(5x+3)$ .

$$\begin{array}{ccccccccccccc} + & + & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - \\ \hline & & & & & | & & & & & & & \\ & \curvearrowleft & & & & & \curvearrowright & & & & & & \\ & & & & & -\frac{3}{5} & & & & & & & \end{array} \quad y'' = \frac{-2(5x+3)}{(x+3)^4}$$

$$x = -\frac{3}{5} \text{ je prevojna tačka, njena } y \text{ koordinata je } y = \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{3}{5} - 2}{\left(-\frac{3}{5} + 3\right)^2} = -\frac{7}{18}$$

koordinate prevojne tačke su  $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{7}{18}\right)$ .

$$d) y = \frac{x^3}{x^2 + 12} \quad y' = \frac{x^2(x^2 + 36)}{(x^2 + 12)^2} \quad y'' = \frac{24x(36 - x^2)}{(x^2 + 12)^3}$$

### **monotonost i ekstremne vrednosti**

$$y' = \frac{x^2(x^2 + 36)}{(x^2 + 12)^2} = 0 \text{ ako i samo ako je } x^2(x^2 + 36) = 0$$

$$x^2(x^2 + 36) = 0 \text{ ako je } x^2 = 0 \text{ ili } x^2 + 36 = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ za } x = 0, \text{ a } x^2 + 36 \text{ je uvek veće od nule}$$

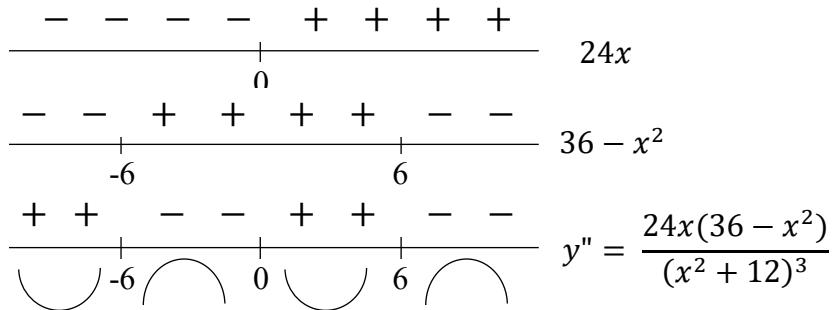
Prvi izvod funkcije je jednak 0 za  $x = 0$ , a za sve ostale vrednosti za  $x$  je veći od nule jer je za svako  $x \neq 0$ ,  $x^2 > 0$ ,  $x^2 + 36 > 0$  i  $(x^2 + 12)^2 > 0$ . To znači da je funkcija monotono rastuća na celoj oblasti definisanosti i **nema ekstremne vrednosti** jer se u tački  $x = 0$  ne menja znak prvog izvoda.

### **konveksnost, konkavnost i prevojne tačke**

$$y'' = \frac{24x(36 - x^2)}{(x^2 + 12)^3} = 0 \text{ ako i samo ako je } 24x = 0 \text{ ili } 36 - x^2 = 0,$$

tj. za  $x = 0$  ili  $x = -6$  ili  $x = 6$

Izraz  $(x^2 + 12)^3$  je uvek veći od nule, jer je i  $x^2 + 12$  uvek veće od nule.  
znak drugog izvoda



Ova funkcija ima tri prevojne tačke

$$\text{za } x = 0 \quad y = \frac{0^3}{0^2 + 12} = 0$$

$$\text{za } x = -6 \quad y = \frac{(-6)^3}{(-6)^2 + 12} = -\frac{9}{2}$$

$$\text{za } x = 6 \quad y = \frac{6^3}{6^2 + 12} = \frac{9}{2}$$

Prevojne tačke su  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2\left(-6, -\frac{9}{2}\right)$ ,  $P_3\left(6, \frac{9}{2}\right)$

**2. Ispitati monotonost, konveksnost i odrediti ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije:**

$$a) \quad y = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3}, \quad b) \quad y = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 1)^2}, \quad c) \quad y = \frac{(1 - x)^3}{2x^2}$$