

4.8 Analiza toka funkcije i crtanje grafika

Da bi mogli da nacrtamo grafik realne funkcije $y = f(x)$ potrebno je:

1. odrediti *oblast definisanosti* funkcije $Df = \{x \in R | f(x) \in R\}$;
2. odrediti *nule funkcije* (presek sa x osom) i *presek sa y osom*;
 - rešavanjem jednačine $f(x) = 0$ dobijamo x koordinate preseka grafika funkcije sa x osom; ako je $f(x_0) = 0$ onda je tačka $N(x_0, 0)$, tačka preseka grafika funkcije sa x osom.
 - ako $0 \in Df$, onda je tačka $M(0, f(0))$ presek grafika funkcije sa y -osom;
3. odrediti *znak funkcije*; odrediti intervale na kojima je funkcija f pozitivna odnosno negativna;
4. ispitati *parnost funkcije*;
 - ako je za svako x iz oblasti definisanosti $f(-x) = f(x)$ kažemo da je funkcija $f(x)$ *parna* i u tom slučaju je grafik funkcije simetričan u odnosu na x osu
 - ako je za svako x iz oblasti definisanosti $f(-x) = -f(x)$, kažemo da je funkcija $f(x)$ *neparna*; u tom slučaju je grafik funkcije simetričan u odnosu na koordinatni početak.
 - većina funkcija nije ni parna ni neparna
5. odrediti *asimptote funkcije*: vertikalne, horizontalnu i kosu asimptotu;
 - ako $a \notin Df$ i ako je
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \text{ ili } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$
onda je prava $x = a$ *vertikalna asimptota*;
 - ako je $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ili $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, onda je prava $y = b$ *horizontalna asimptota*;
 - ako je $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ i $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$ onda je prava $y = ax + b$ *kosa asimptota*;
6. odrediti *intervale monotonosti i ekstremne vrednosti*;
 - naći prvi izvod funkcije, f'
 - odrediti nule prvog izvoda

- odrediti znak prvog izvoda; na intervalu gde je prvi izvod pozitivan, $f'(x) > 0$, funkcija je *monotonu rastuća*, na intervalu gde je prvi izvod negativan, $f'(x) < 0$, funkcija je *monotonu opadajuća*
 - ako je $f'(c) = 0$ i za vrednosti manje od c funkcija je monotonu opadajuća, a za vrednosti veće od c funkcija monotonu rastuća onda funkcija u tački c ima *lokalni minimum* čije su koordinate $P_{\min}(c, f(c))$, a ako je za vrednosti manje od c funkcija je monotonu rastuća, a za vrednosti veće od c funkcija monotonu opadajuća onda funkcija u tački c ima *lokalni maksimum* čije su koordinate $P_{\max}(c, f(c))$.
7. odrediti *intervale konveksnosti i prevojne tačke*;
- odrediti drugi izvod funkcije f'' ,
 - odrediti nule drugog izvoda funkcije
 - odrediti znak drugog izvoda funkcije; na intervalu gde je drugi izvod pozitivan $f''(x) > 0$, funkcija je konveksna, a na intervalu gde je drugi izvod negativan $f''(x) < 0$, funkcija je konkavna;
 - odrediti prevojne tačke funkcije; ako je $f''(x_0) = 0$ i u toj tački funkcija menja konveksnost (iz konveksne u konkavnu ili obrnuto) onda je $P(x_0, f(x_0))$ prevojna tačka.

Na osnovu izvršene analize, može se skicirati grafik funkcije $f(x)$.

Prime 1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y = \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 3}$.

1) Oblast definisanosti: Kako deljenje nulom nije definisano, racionalna funkcija nije definisana za one vrednosti za koje je izraz u imenocu (ispod razlomačke crte) jednak nuli. $x - 3 = 0$ za $x = 3$. Dakle $Df = \{x \in R | x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

2) Nule funkcije i presek sa y osom. Vrednosti argumenta x za koje je funkcija jednaka nuli, nazivaju se nule funkcije (presek sa x osom). Racionalna funkcija je jednaka nuli za one vrednosti za koje je izraz u brojiocu (iznad razlomačke crte) jednak nuli.

$y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$. Izraz u brojiocu je kvadratna funkcija. Nule kvadratne funkcije se dobijaju rešavanjem kvadratne jednačine.

Opšti oblik kvadratne jednačine je $ax^2 + bx + c = 0$. Rešenja se dobijaju po sledećem obrascu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \text{ Ako je diskriminanta } D = b^2 - 4ac > 0, \text{ jednačina ima dva rešenja,}$$

ako je $D = 0$, jednačina ima jedno rešenje, a ako je $D < 0$, jednačina nema rešenja.

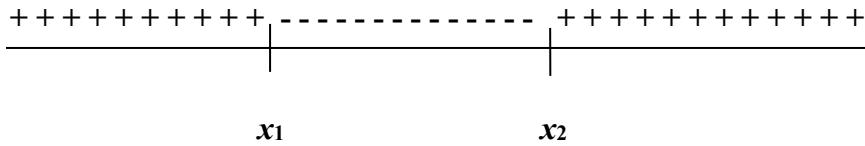
$$\text{U ovom primeru je } D = 16 + 20 = 36, \text{ pa jednačina ima dva rešenja } x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}.$$

$x_1 = \frac{-4 + 6}{2} = 1$, a $x_2 = \frac{-4 - 6}{2} = -5$. To znači da ova funkcija ima dve nule, odnosno **dva preseka sa x osom** $N_1(1, 0)$ i $N_2(-5, 0)$.

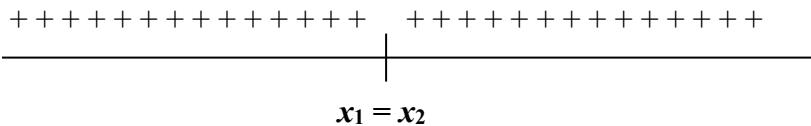
Presek sa y osom se dobija kad se za vrednost argumenta x uzme nula i izračuna vrednost funkcije. $x = 0 \Rightarrow y = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$. **Presek sa y osom je tačka $M(0, 5/3)$.**

3) Znak funkcije. Znak kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ zavisi od znaka konstante a i vrednosti determinante D .

Ako je $a > 0$ i $D > 0$, $y > 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, a $y < 0$ za $x \in (x_1, x_2)$.

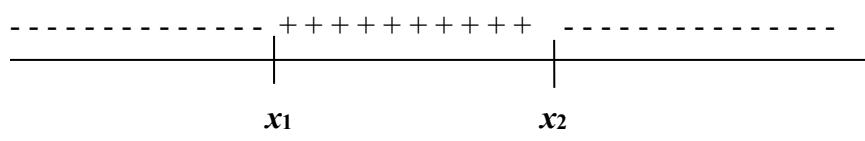


Ako je $a > 0$ i $D = 0$, jednačina ima samo jedno rešenje i kvadratna funkcija je pozitivna za svako x iz oblasti definisanosti, osim za rešenje $x_1 = x_2$.

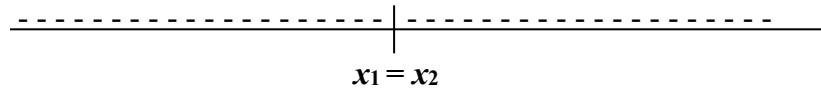


Ako je $a > 0$ i $D < 0$, jednačina nema rešenje, pa kvadratna funkcija $y = ax^2 + bx + c$ nema presek sa x osom i $y > 0$ za svako x iz oblasti definisanosti, kao na prethodnoj slici.

Ako je $a < 0$ i $D > 0$, $y > 0$ za $x \in (x_1, x_2)$, a $y < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

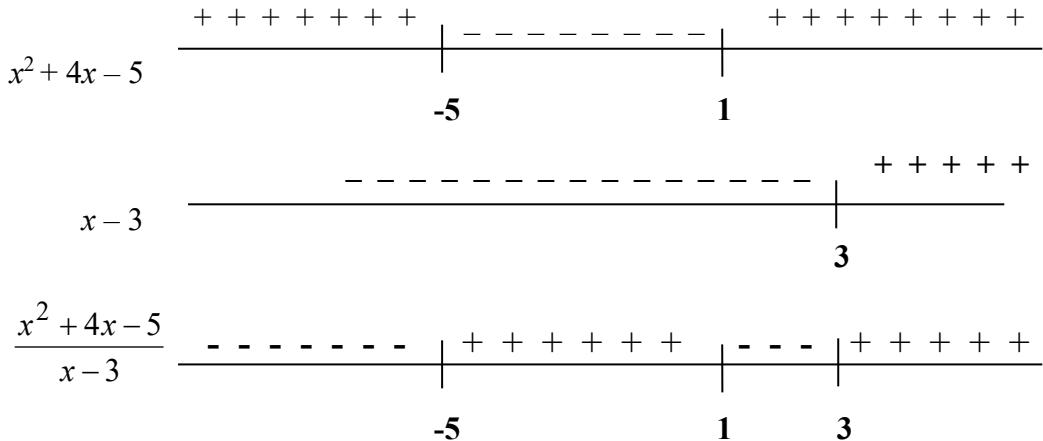


Ako je $a < 0$ i $D = 0$, jednačina ima samo jedno rešenje i kvadratna funkcija ima negativan znak za svako x iz oblasti definisanosti, osim za rešenje $x_1 = x_2$.



Ako je $a < 0$ i $D < 0$, jednačina nema rešnje, pa kvadratna funkcija $y = ax^2 + bx + c$ nema presek sa x osom i $y < 0$ za svako x iz oblasti definisanosti.

U našem primeru znak određujemo na sledeći način:



Dakle $y > 0$ za $x \in (-5, 1) \cup (3, \infty)$, a $y < 0$ za $x \in (-\infty, -5) \cup (1, 3)$.

4) Parnost

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 4(-x) - 5}{-x - 3} = \frac{x^2 - 4x - 5}{-x - 3} \neq -f(x)$$

Funkcija nije ni parna, ni neparna.

5) Asimptote.

Ako funkcija nije definisana u tački a , funkcija ima u toj tački **vertikalnu asimptotu** ukoliko važi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$.

U našem slučaju funkcija nije definisana u $a = 3$. Ispitaćemo kakve vrednosti funkcija dobija u okolini te tačke.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 3} &= \left(\begin{array}{l} x = 3 + h \\ h > 0, h \rightarrow 0 \end{array} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 + 4(3+h)-5}{3+h-3} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 + 12 + 4h - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 10h + 16}{h} = \frac{16}{0} = +\infty. \end{aligned}$$

Za određivanje granične vrednosti upotrebili smo smenu $x = 3 + h$, gde je h mala pozitivna veličina koja teži nuli. Na osnovu dobijene granične vrednosti, zaključujemo da kad x teži ka 3 sa desne strane funkcija teži $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 3} = \begin{cases} x = 3 - h \\ h > 0, h \rightarrow 0 \end{cases} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3-h)^2 + 4(3-h) - 5}{3-h-3} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 - 6h + h^2 + 12 - 4h - 5}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 10h + 16}{-h} = \frac{16}{-0} = -\infty.$$

Sada smo upotrebili smenu $x = 3 - h$, gde je h mala pozitivna veličina koja teži nuli. Na osnovu dobijene granične vrednosti, zaključujemo da kad x teži ka 3 sa leve strane funkcija teži $-\infty$. Dakle prava $x = 3$ je **vertikalna asimptota** funkcije i sa leve i sa desne strane grafika.

Ukoliko važi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ili $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, onda je prava $y = b$, **horizontalna asimptota**.

Granična vrednost racionalne funkcije kad $x \rightarrow \infty$, određuje se na sledeći način:

Opšti oblik racionalne funkcije je $\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n \left(a_0 + a_1 \frac{1}{x} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + a_n \frac{1}{x^n} \right)}{x^m \left(b_0 + b_1 \frac{1}{x} + \dots + b_{m-1} \frac{1}{x^{m-1}} + b_m \frac{1}{x^m} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n a_0}{x^m b_0} = \begin{cases} \infty, & n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

U našem primeru je $n = 2, m = 1$, pa je $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 3} = \infty$

što znači da vertikalna asimptota ne postoji. Vertikalna i kosa asimptota se uzajamno isključuju, ako postoji jedna ne postoji druga. U ovom primeru ne postoji horizontalna asimptota, pa ćemo ispitati da li postoji kosa asimptota.

Opšti obrazac za **kosu asimptotu** je $y = ax + b$, gde je $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, a $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$.

$$U našem primeru je a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 4x - 5}{x-3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 3x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x - 5}{x-3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 5 - x^2 + 3x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 5}{x-3} = 7$$

pa je kosa asimptota $y = x + 7$. Da bi nacrtali kosu asimptotu, dovoljne su nam bilo koje dve njene tačke. $y(0) = 7$, $y(-7) = 0$. Kosa asimptota prolazi kroz tačke $K_1(0, 7)$ i $K_2(-7, 0)$.

6) Monotonost funkcije i ekstremne vrednosti.

Da bi odredili ekstremne vrednosti i intervale monotonosti, potrebno je da nađemo prvi izvod funkcije i nule prvog izvoda.

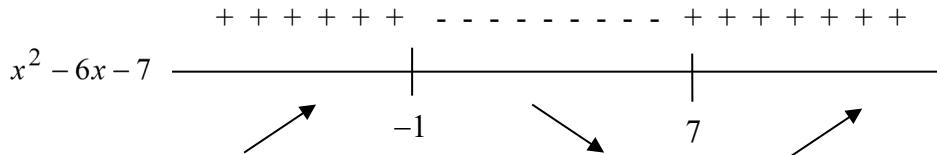
Za nalaženje izvoda racionalne funkcije upotrebimo formulu za izvod količnika.

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \text{ U našem slučaju je } u = x^2 + 4x - 5, v = x - 3, u' = 2x + 4, v' = 1.$$

$$y' = \left(\frac{x^2 + 4x - 5}{x - 3} \right)' = \frac{(x^2 + 4x - 5)'(x - 3) - (x^2 + 4x - 5)(x - 3)'}{(x - 3)^2} = \\ \frac{(2x + 4)(x - 3) - (x^2 + 4x - 5) \cdot 1}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6x + 4x - 12 - x^2 - 4x + 5}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 7}{(x - 3)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_1 = \frac{14}{2} = 7, x_2 = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow y' = \frac{(x - 7)(x + 1)}{(x - 3)^2}$$

Dakle, nule prvog izvoda su $x_1 = 7$ i $x_2 = -1$. Sada treba odrediti znak prvog izvoda. Kako je u imenici funkcije y' , izraz $(x - 3)^2$ koji je pozitivan za svaki realan broj (zbog toga što je izraz na kvadrat), znak funkcije y' zavisi samo od znaka kvadratne funkcije u brojiocu $x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1)$.



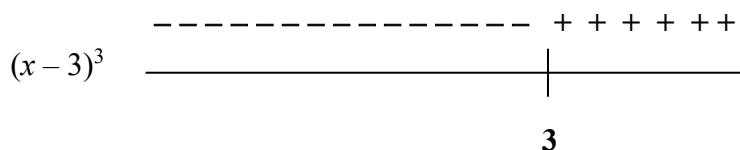
$y' > 0$ za $x \in (-\infty, -1) \cup (7, \infty)$, pa je funkcija monotono rastuća na tim intervalima;
 $y' < 0$ za $x \in (-1, 7)$, pa je funkcija monotono opadajuća na tom intervalu. U tački $x = -1$, funkcija menja svoju monotonost, iz monotono rastuće prelazi u monotono opadajuću, pa u

toj tački funkcija ima lokalni maksimum. U tački $x = 7$ iz monotono opadajuće, funkcija prelazi u monotono rastuću, pa u toj tački ima lokalni minimum. y koordinatu maksimuma dobijamo kad za vrednost argumenta u funkciji zamenimo $x = -1$.

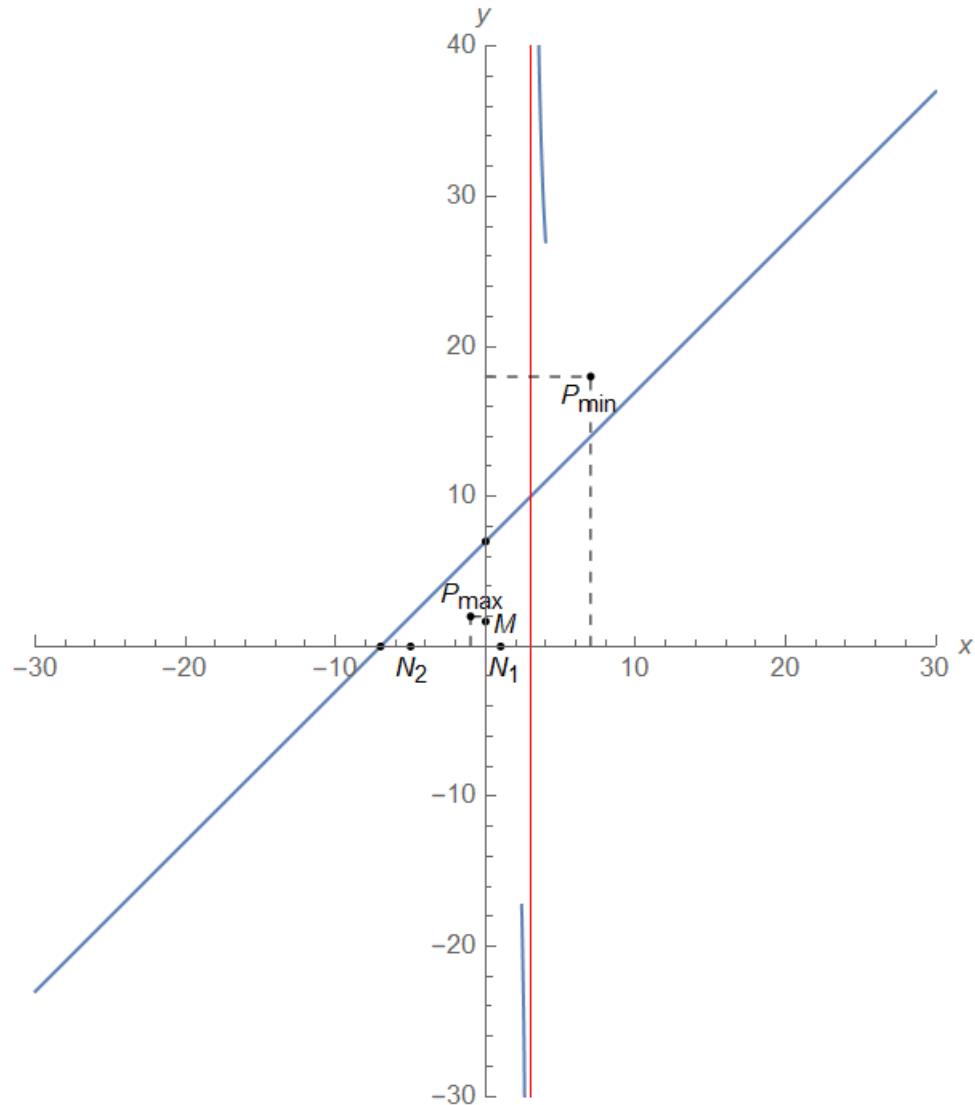
$$y_{\max} = y(-1) = \frac{(-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 5}{-1 - 3} = \frac{-8}{-4} = 2, \quad P_{\max}(-1, 2) - \text{koordinate maksimuma}$$

$$y_{\min} = y(7) = \frac{7^2 + 4 \cdot 7 - 5}{7 - 3} = \frac{72}{4} = 18, \quad P_{\min}(7, 18) - \text{koordinate minimuma}$$

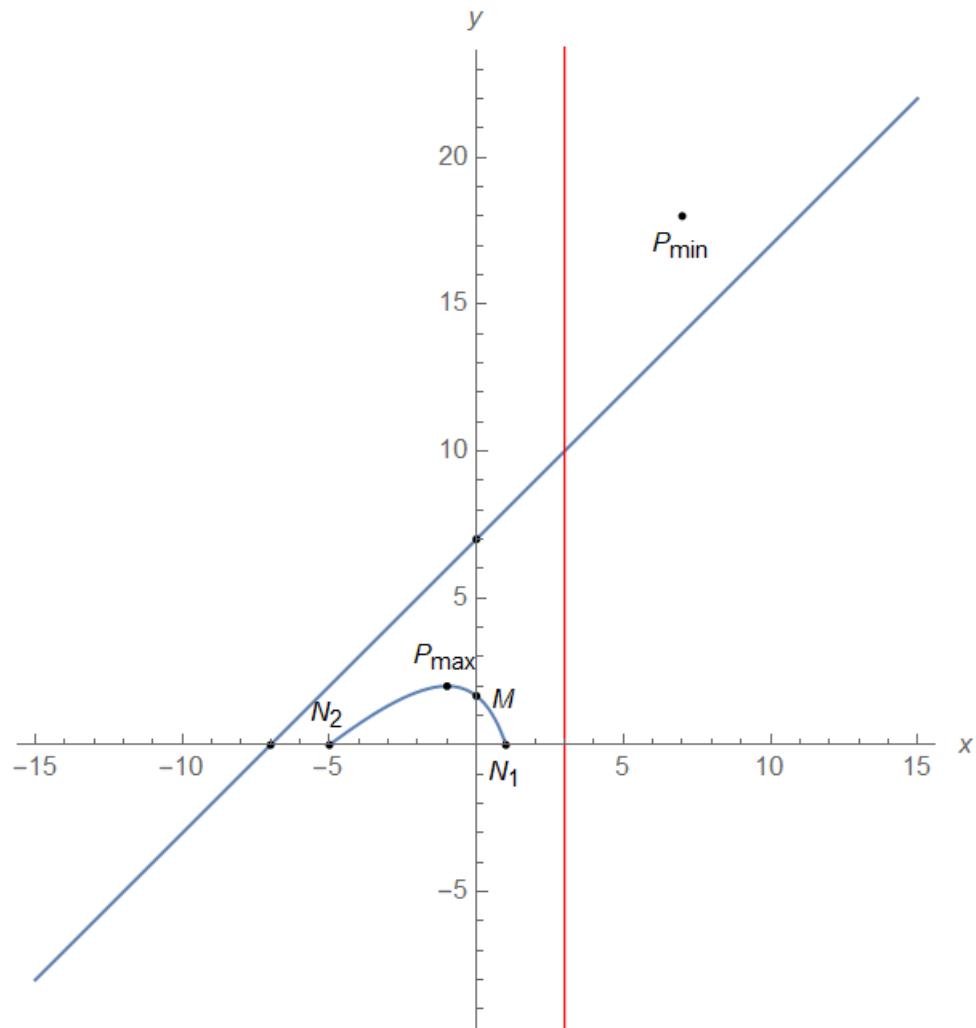
7) konveksnost, konkavnost i prevojne tačke $y'' = \frac{32}{(x-3)^3}$; drugi izvod funkcije nema nule, pa funkcija nema prevojne tačke; funkcija je konkavna za $x \in (-\infty, 3)$, konveksna za $x \in (3, +\infty)$



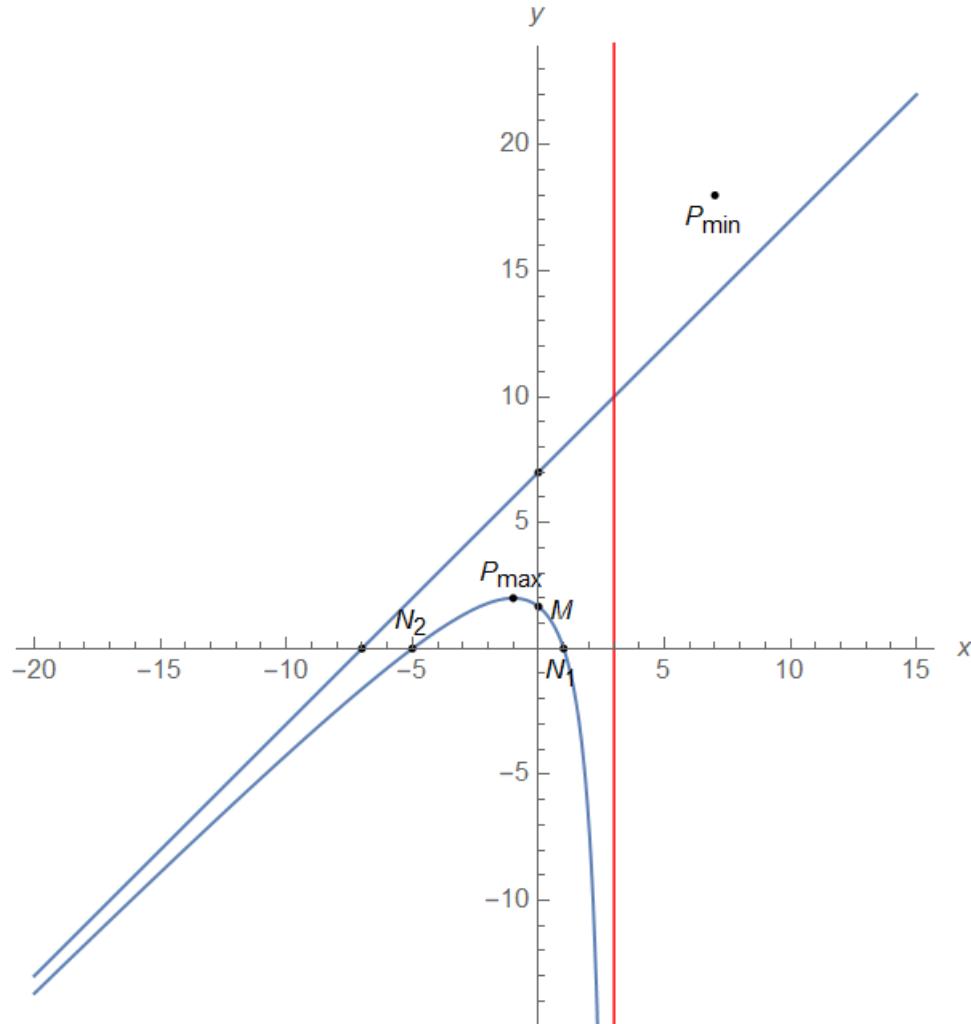
Sada treba nacrtati grafik funkcije. Najpre nacrtamo koordinatni sistem, vertikalnu i kosu asimptotu, obeležimo karakteristične tačke (nule, presek sa y osom, minimum, maksimum, ...). i označimo kako izgleda grafik funkcije u okolini vertikalne asimptote.



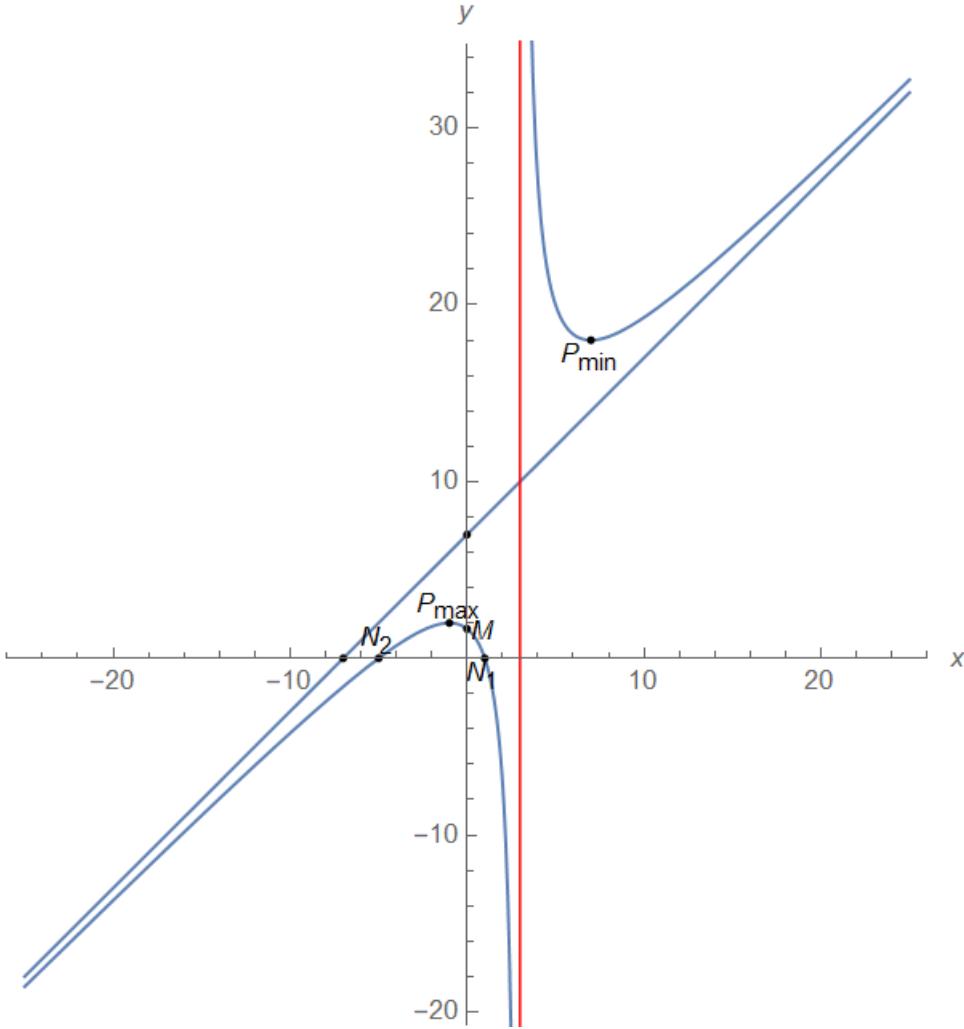
Crtamo najpre grafika sa leve strane vertikalne asimptote. Na intervalu $(-\infty, -1)$, funkcija je monotono rastuća, u -1 dostiže svoj maksimum, a zatim opada. Prolazi kroz tačke N_2, P_{max}, M i N_1 . Na intervalu $(-\infty, 3)$, funkcija je konkavna i pozitivan na intervalu $(-5, 1)$, što znači da se u tom delu njen grafik nalazi iznad x ose.



Kada $x \rightarrow 3^-$, funkcija se približava vertikalnoj asimptoti, a kada $x \rightarrow -\infty$, funkcija se približava kosoj asimptoti. Sada možemo da dovršimo grafik sa leve strane vertikalne asimptote.



Sa desne strane vertikalne asimptote, znamo da je funkcija konveksna, da kada $x \rightarrow 3^+$, grafik funkcije se približava vertikalnoj asimptoti, a kada kada $x \rightarrow +\infty$, funkcija se približava kosoj asimptoti. Funkcija opada na intervalu $(3, 7)$, u tački P_{max} dostiže minimum, a zatima raste na intervalu $(7, +\infty)$. Možemo da nacrtamo i deo grafika sa desne strane vertikalne asimptote.



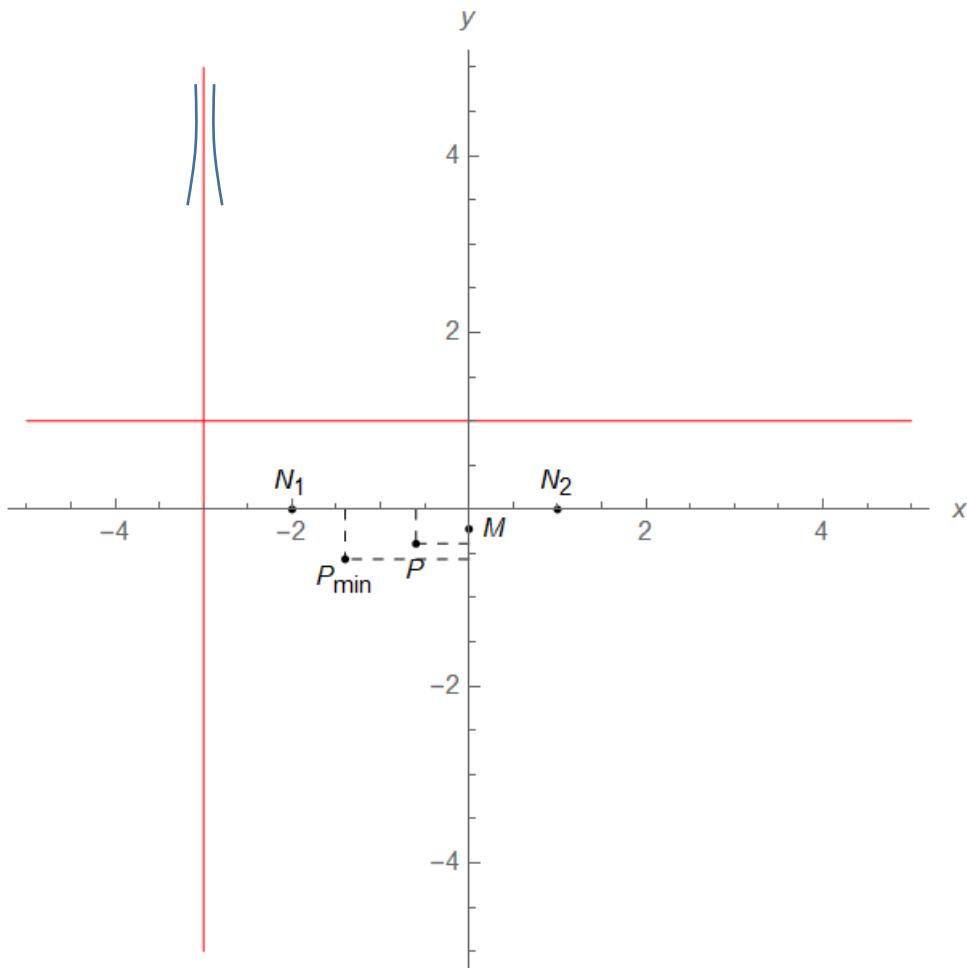
Primer2. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y = \frac{x^2 + x - 2}{(x + 3)^2}$,

- 1) oblast definisanosti $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$;
- 2) nule funkcije $N_1(-2, 0)$, $N_2(1, 0)$; presek grafika funkcije sa y-osom $M(0, -2/9)$;
- 3) znak funkcije za $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, $y > 0$, a za $x \in (-2, 1)$, $y < 0$;
- 4) funkcija nije ni parna ni neparna
- 5) asymptote: vertikalna asymptota $x = -3$; horizontalna asymptota $y = 1$;
- 6) monotonost i ekstremne vrednosti $y' = \frac{5x + 7}{(x + 3)^3}$; za $x \in (-\infty, -3) \cup (-7/5, +\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x \in (-3, -7/5)$, funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}(-7/5, -9/16)$;

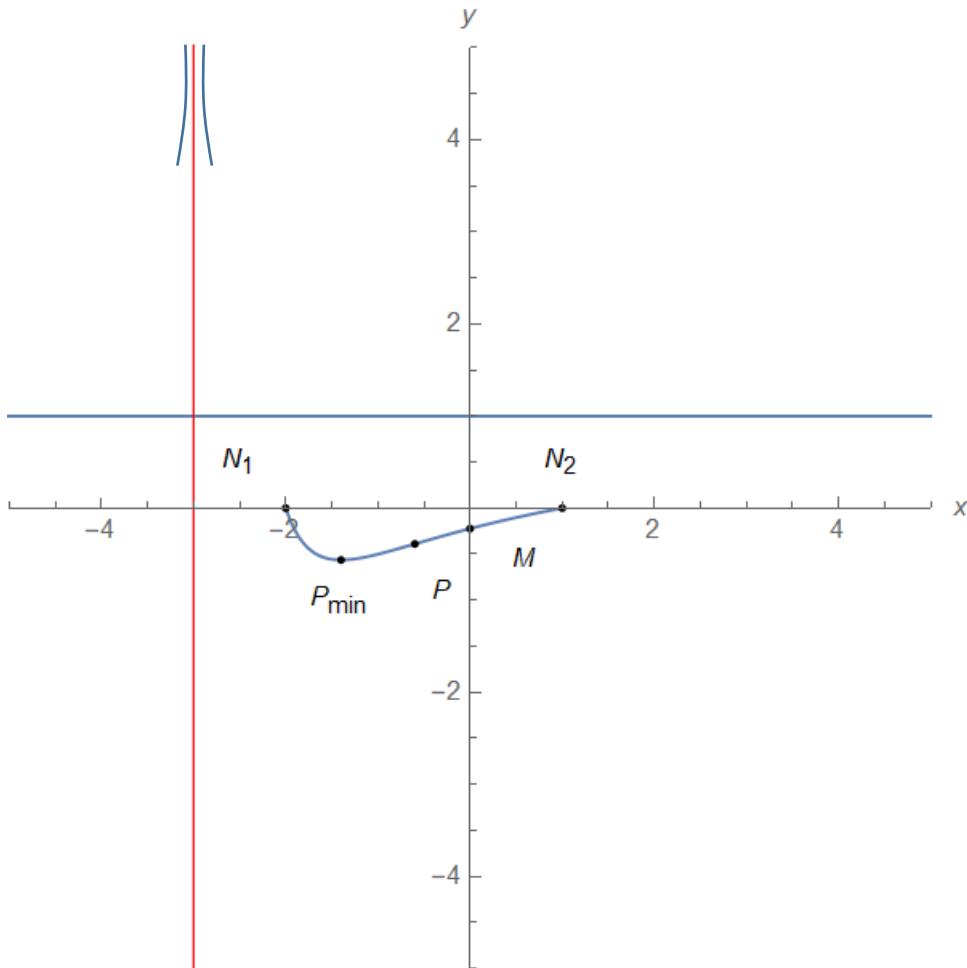
4) konveksnost i prevojne tačke $y'' = \frac{-2(5x+3)}{(x+3)^4}$, funkcija je konveksna za $x \in (-\infty, -3/5)$,

konkavna za $x \in (-3/5, +\infty)$ i ima prevojnu tačku $P(-3/5, -7/18)$.

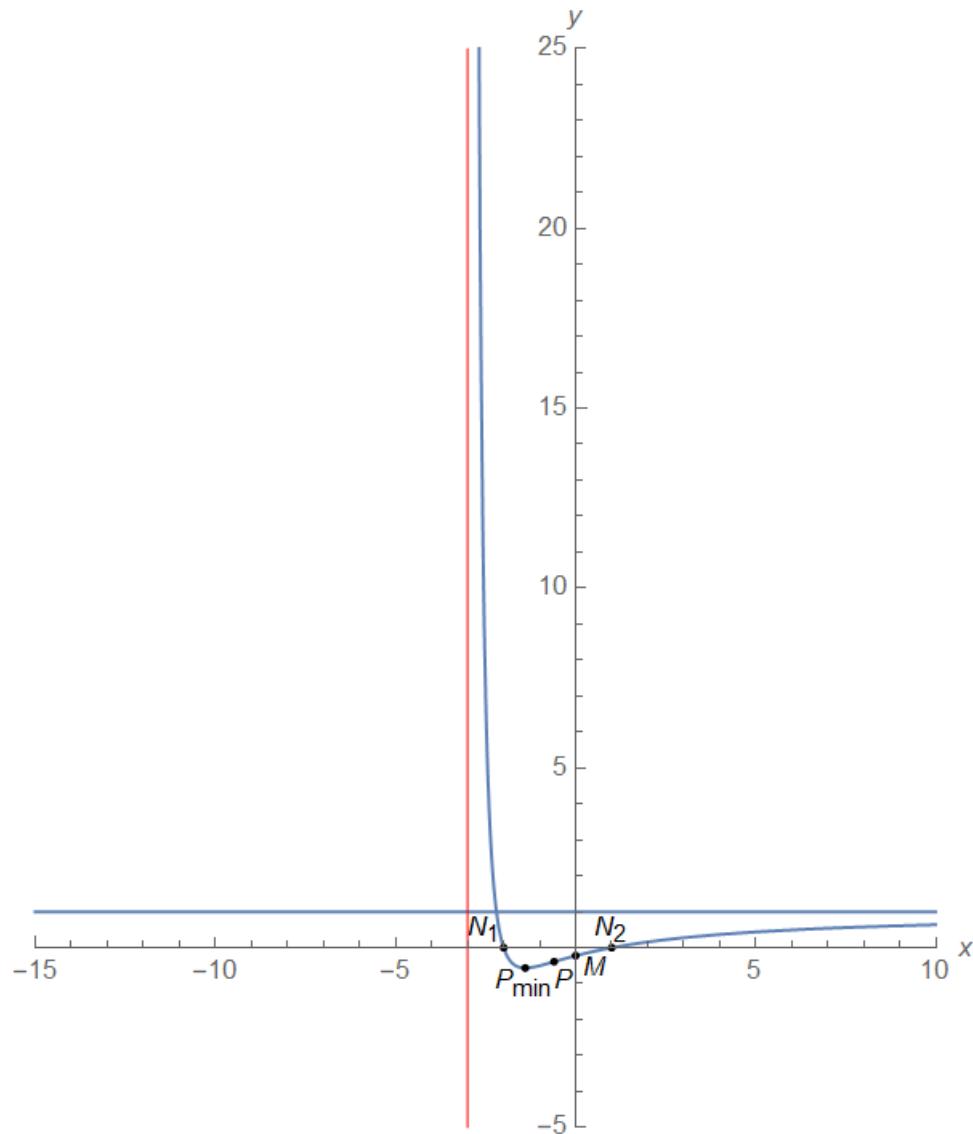
Najpre ćemo nacrtati koordinatni sistem, vertikalnu i horizontalnu asimptotu, obeležiti karakteristične tačke (nule, presek sa y osom, minimum, prevojnu tačku) i kako izgleda grafik funkcije u okolini vertikalne asymptote.



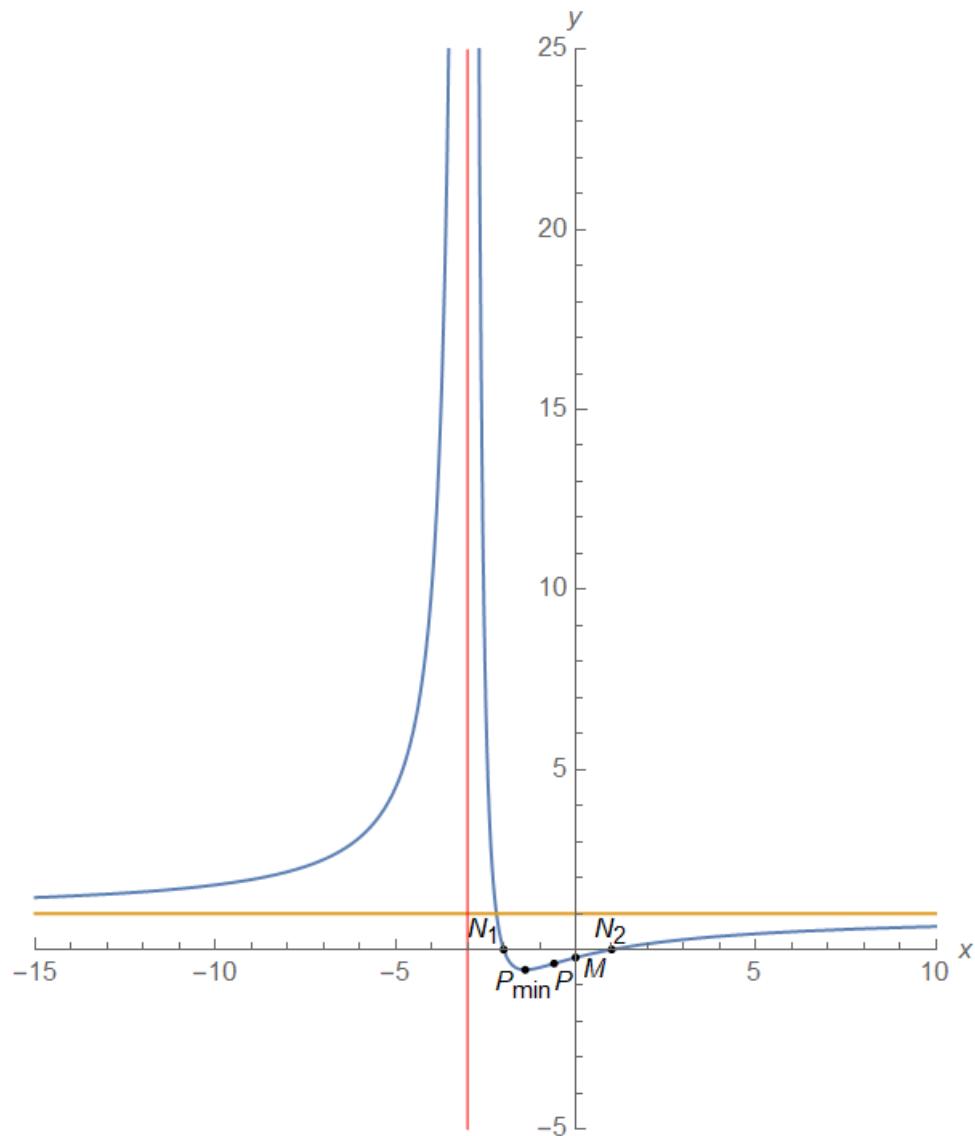
Sada crtamo deo grafika desno od vertikalne asimptote, počev od tačke N_1 preko P_{min}, P, M i N_2 . Funkcija je monotono opadajuća na intervalu $(-3, -\frac{7}{5})$, do tačke P_{min} , a posle toga raste. Konveksna je na intervalu $(-\frac{3}{5}, \infty)$, sve do prevojne tačke P , a nakon nje menja oblik u konkavnu.



Kad $x \rightarrow -3^+$, funkcija teži beskonačno, tj. približava se vertikalnoj asimptoti u gornjem delu, a kad $x \rightarrow +\infty$, funkcija se približava horizontalnoj asimptoti.



Levo od vertikalne asimptote, funkcija nema karakteristične tačke. Funkcija je intervalu $(-\infty, -3)$, monotono rastuća i konveksna. Kad $x \rightarrow -3^-$, funkcija teži plus beskonačno, tj. približava se vertikalnoj asimptoti u gornjem delu, a kad $x \rightarrow -\infty$, funkcija se približava horizontalnoj asimptoti. Gotov grafik izgleda kao na slici ispod.



ANALIZA TOKA FUNKCIJE I CRTANJE GRAFIKA – vežbe

1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije:

$$a) y = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}, \quad b) y = \frac{(x + 2)^2}{x^2 + 4x - 5}, \quad c) y = \frac{x^3}{x^2 + 12},$$

$$d) y = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3}, \quad e) y = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 1)^2}, \quad f) y = \frac{(1 - x)^3}{2x^2}.$$

Rešenja.

$$a) y = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3} = \frac{(x - 4)^2}{x - 3}$$

1) oblast definisanosti $Df = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

2) nule funkcije i presek sa y osom $N(4,0), M\left(0, -\frac{16}{3}\right)$

3) znak funkcije

$$\begin{array}{ccccccccccccc} - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline & & & & & | & & & & & & & & & \\ & & & & & 3 & & & & & & & & & \end{array} \quad y = \frac{(x - 4)^2}{x - 3}$$

4) funkcija nije ni parna ni neparna

5) vertikalna asimptota $x = 3$, kada $x \rightarrow 3^-$, funkcija teži $-\infty$, a kada $x \rightarrow 3^+$,

funkcija teži $+\infty$.

kosa asimptota $y = x - 5$, prolazi kroz tačke $(0, -5)$ i $(5, 0)$ i kada $x \rightarrow \pm\infty$, grafik funkcije se približava kosoj asimptoti.

6) monotonost i ekstremne vrednosti (iz prethodnih vežbi)

$$y' = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} + & + & + & + & - & - & - & + & + & + \\ \hline & & & & | & & & | & & & & & & & \\ & & & & 2 & & 3 & & 4 & & & & & & \end{array} \quad y' = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$$

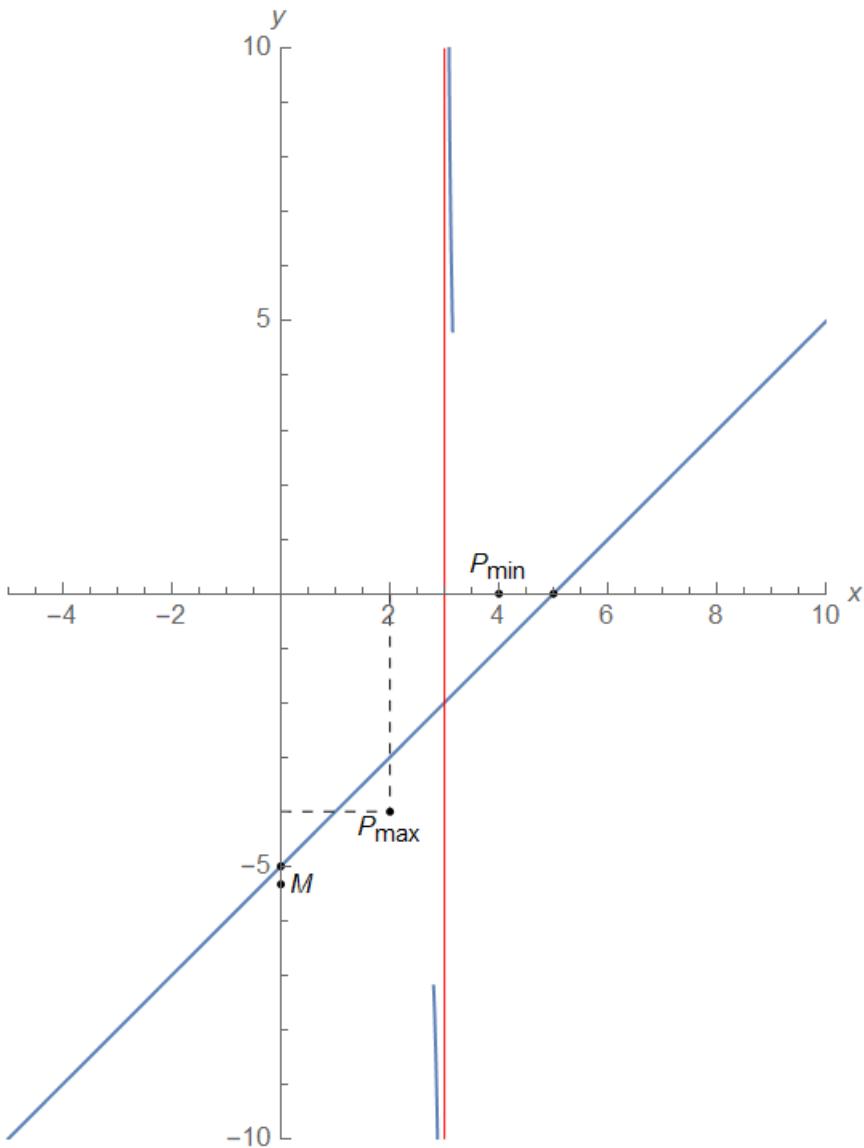
$P_{max}(2, -4), P_{min}(4, 0)$ se poklapa sa nulom funkcije N.

7) konveksnost, konkavnost i ekstremne vrednosti

$$y'' = \frac{2}{(x - 3)^3} \quad \text{funkcija nema prevojne tačke}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} - & - & - & - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline & & & & & & & & | & & & & & & \\ & & & & & & & & 3 & & & & & & \end{array} \quad y'' = \frac{2}{(x - 3)^3}$$

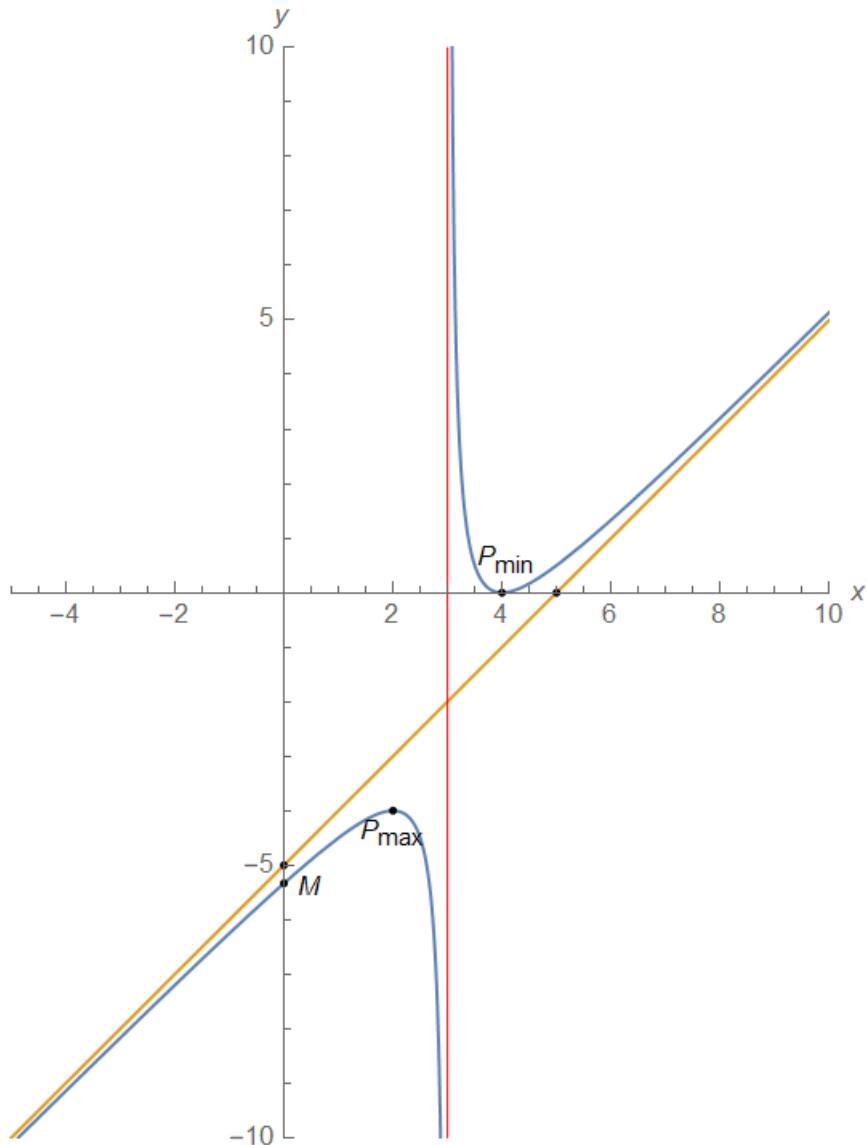
Najpre crtamo koordinatni sistem, vertikalnu i kosu asimptotu i unosimo karakteristične tačke. Obeležimo kako izgleda grafik u okolini vertikalne asimptote.



Levo od vertikalne asimptote, znak funkcije je negativan, znači grafik se nalazi ispod x ose. Kada $x \rightarrow -\infty$, grafik se približava kosoj asimptoti. Funkcija raste na intervalu od $(-\infty, 2)$, prolazi kroz tačke M i P_{\max} , a zatim opada na intervalu $(2, 3)$, kada $x \rightarrow 3^-$, funkcija teži $-\infty$. Funkcija je konkavna na $(-\infty, 3)$. Desno od vertikalne asimptote, funkcija je konveksna na intervalu $(3, +\infty)$. Kada $x \rightarrow 3^+$, funkcija teži $+\infty$. Funkcija opada na intervalu $(3, 4)$, grafik prolazi kroz tačku

P_{min} , zatim raste na intervalu $(4, +\infty)$ i kada $x \rightarrow +\infty$, grafik se približava kosoj asimptoti

Njen grafik je prikazan na slici ispod.



$$b) y = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4x - 5}$$

- 1) $Df = (-\infty, -5) \cup (-5, 1) \cup (1, +\infty)$
 2) nula funkcije $N(-2, 0)$ presek grafika funkcije sa y osom $M\left(0, -\frac{4}{5}\right)$.
 3) znak funkcije

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline & & & | & & & & & | & & & \\ & & & -5 & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{array} \quad y = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4x - 5}$$

- 4) funkcija nije ni parna, ni neparna
 5) funkcija ima dve vertikalne asymptote $x = -5$ i $x = 1$ i horizontalnu asymptotu $y = 1$.
 6) monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = \frac{-18(x+2)}{(x^2 + 4x - 5)^2}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} + & + & + & + & - & - & - & - & - & - \\ \nearrow & \nearrow & & & \searrow & & & \searrow & & \searrow \\ -5 & -2 & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{array} \quad y' = \frac{-18(x+2)}{(x^2 + 4x - 5)^2}$$

$$P_{max}(-2, 0)$$

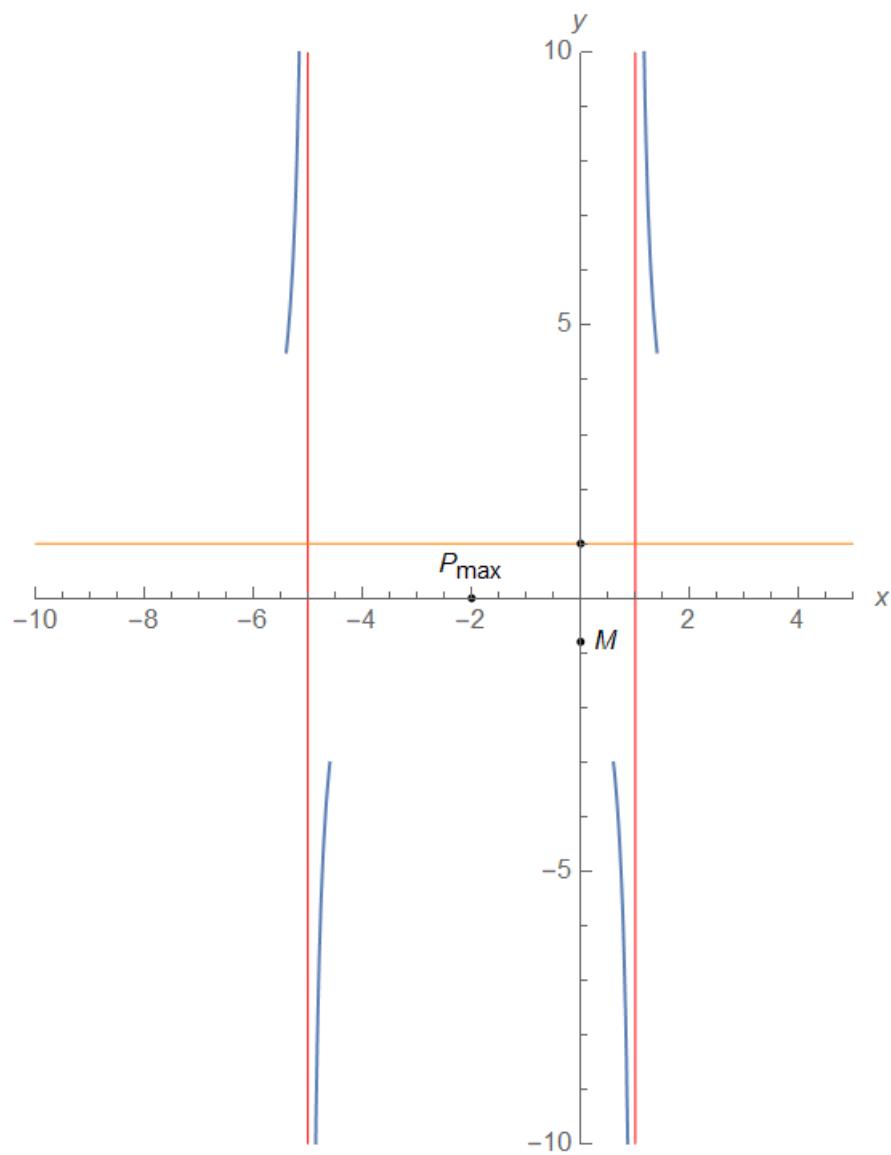
- 7) konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \frac{54(x^2 + 4x + 7)}{(x^2 + 4x - 5)^3}$$

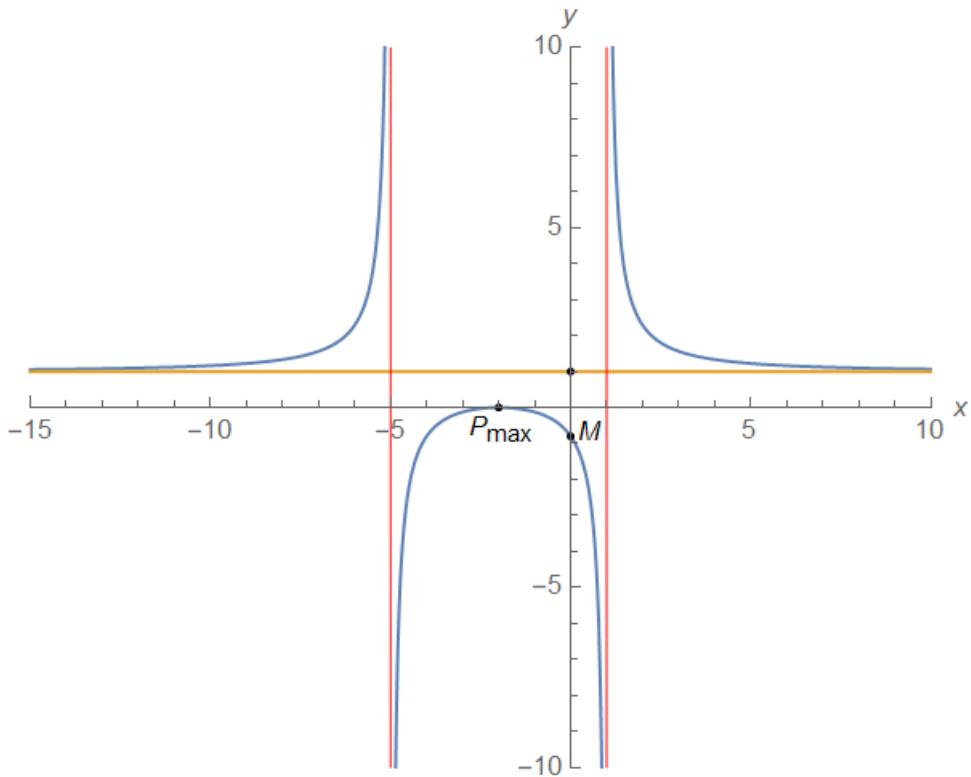
$x^2 + 4x + 7$ nema nule, pa ova funkcija nema prevojne tačke.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} + & + & - & - & - & - & + & + & + \\ \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup \\ -5 & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{array} \quad y'' = \frac{54(x^2 + 4x + 7)}{(x^2 + 4x - 5)^3}$$

Najpre crtamo koordinatni sistem, vertikalnu i horizontalnu asimptotu i unosimo karakteristične tačke. Obeležimo kako izgleda grafik u okolini vertikalnih asimptota.



Između vertikalnih asimptota, funkcija je konkavna. Raste do tačke P_{max} , zatim opada i prolazi kroz tačku M . Levo od vertikalne asimptote $x = -5$ i desno od $x = 1$, funkcija je konveksna. Kad $x \rightarrow \pm\infty$, grafik se približava horizontalnoj asimptoti. Na intervalu $(-\infty, -5)$ funkcija raste, a na intervalu $(1, +\infty)$ funkcija opada.



c) $y = \frac{x^3}{x^2 + 12}$

- 1) $Df = (-\infty, +\infty)$
- 2) nula funkcije i ujedno presek sa y osom $N(0,0)$.
- 3) znak funkcije

$$\begin{array}{ccccccccccccc} - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline & & | & & & & & & & & & & & & \end{array} \quad y = \frac{x^3}{x^2 + 12}$$

4) parnost i neparnost

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 12} = \frac{-x^3}{x^2 + 12} = -\frac{x^3}{x^2 + 12} = -f(x)$$

Ova funkcija je neparna, što znači da će njen grafik biti simetričan u odnosu na y osu.

5) funkcija nema vertikalnu, niti horizontalnu asimptotu, ima samo kosu asimptotu $y = x$.

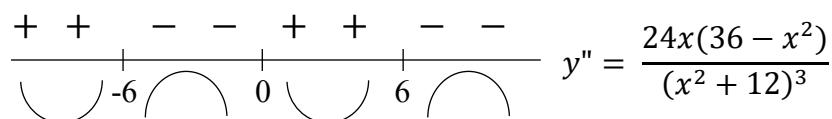
6) monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = \frac{x^2(x^2 + 36)}{(x^2 + 12)^2}$$

Prvi izvod funkcije je pozitivan na celoj oblasti definisanosti, pa je funkcija monotono rastuća celim svojim tokom i nema ekstremne vrednosti.

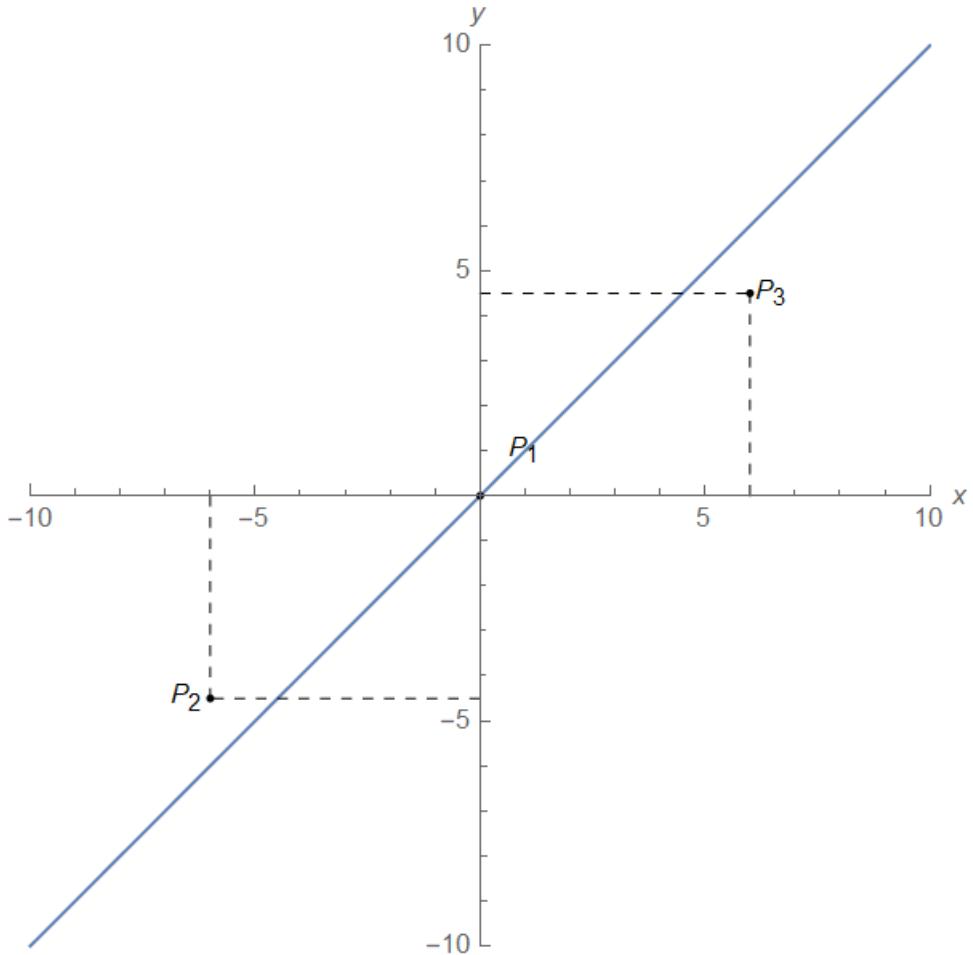
7) konveksnost konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \frac{24x(36 - x^2)}{(x^2 + 12)^3}$$

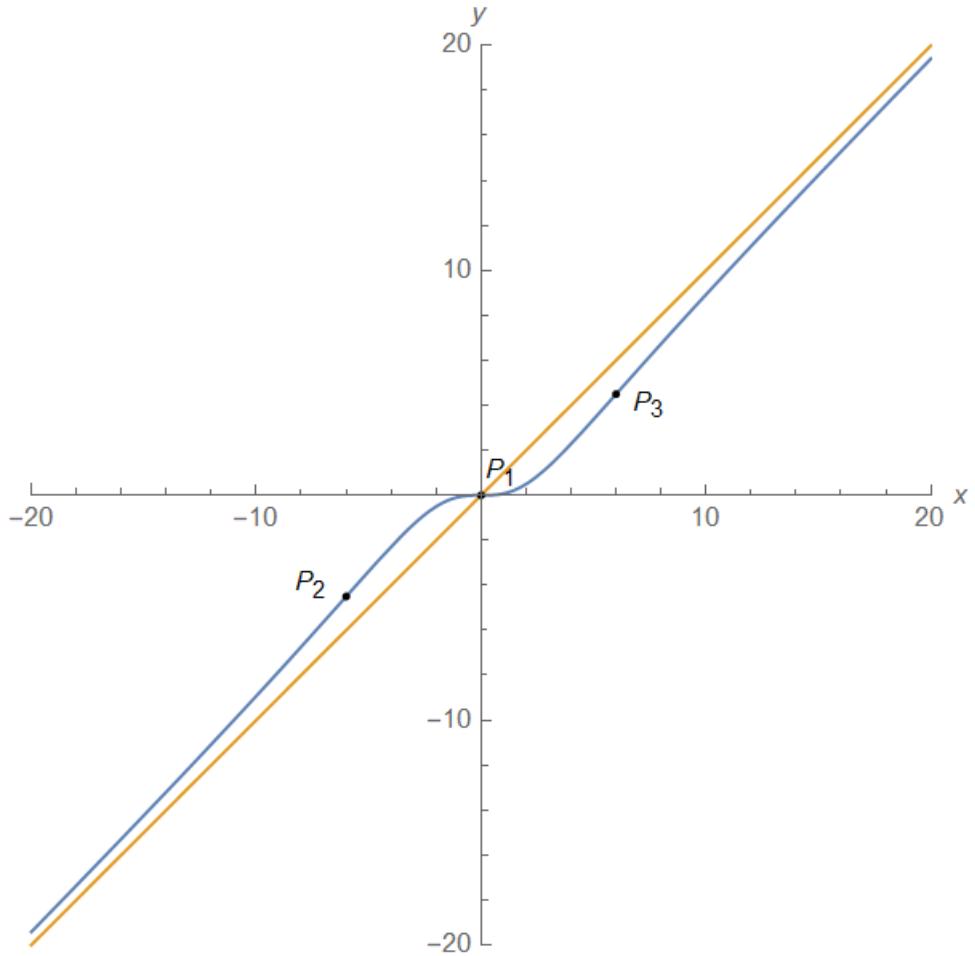


Funkcija ima tri prevojne tačke $P_1(0, 0), P_2\left(-6, -\frac{9}{2}\right), P_3\left(6, \frac{9}{2}\right)$. Prevojna tačka se poklapa sa nulom funkcije N.

Najpre crtamo koordinatni sistem, kosu asimptotu i unosimo karakteristične tačke.



Funkcija je monotono rastuća celim tokom, kad $x \rightarrow \pm\infty$, grafik se približava kosoj asimptoti, prolazi kroz prevojne tačke, do tačke P_2 funkcija je konvesna, između tačaka P_2 i P_1 konkavna, između P_1 i P_3 konveksna i od P_3 do $+\infty$ opet konkavna. Grafik treba da bude simetričan u odnosu na koordinatni početak, što se već uočava kod prevojnih tačaka.



Rešenja

$$d) y = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3}$$

1) $x + 3 \neq 0, x \neq -3, Df = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

2) nule funkcije

$$x^2 - 3x - 10 = 0, x_1 = -2, x_2 = 5, N_1(-2, 0), N_2(5, 0)$$

presek sa y osom

$$\text{za } x = 0, y = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 - 10}{0 + 3} = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}, \quad M\left(0, -3\frac{1}{3}\right)$$

3) znak funkcije

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 + & + & + & - & - & - & - & + & + \\
 \hline
 & & | & & & & & | & \\
 & & -2 & & & & & 5 & \\
 - & - & + & + & + & + & + & + & + \\
 \hline
 & & | & & & & & | & \\
 & & -3 & & & & & 5 & \\
 - & - & + & - & - & - & - & + & + \\
 \hline
 & & | & & & & & | & \\
 & & -3 & & -2 & & & 5 & \\
 & & & & & & & & \\
 \end{array} \quad x^2 - 3x - 10$$

4) parnost

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3(-x) - 10}{-x + 3} = \frac{x^2 + 3x - 10}{-x + 3} \neq -f(x)$$

funkcija nije ni parna ni neparna

5) funkcija ima **vertikalnu asimptotu** $x = -3$ i **kosu asimptotu** $y = x - 6$

6) monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x + 3)^2}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 + & + & - & - & - & - & + & + & + & + \\
 \hline
 & & | & & & & | & & & \\
 & & -5,82 & & & & -0,18 & & & \\
 + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\
 \hline
 & & | & & & & | & & & \\
 & & -3 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 \end{array} \quad x^2 + 6x + 1$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 + & + & - & - & - & - & + & + & + & + \\
 \hline
 \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 -5,82 & -3 & -0,18 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 \end{array} \quad (x + 3)^2 \quad y' = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x + 3)^2}$$

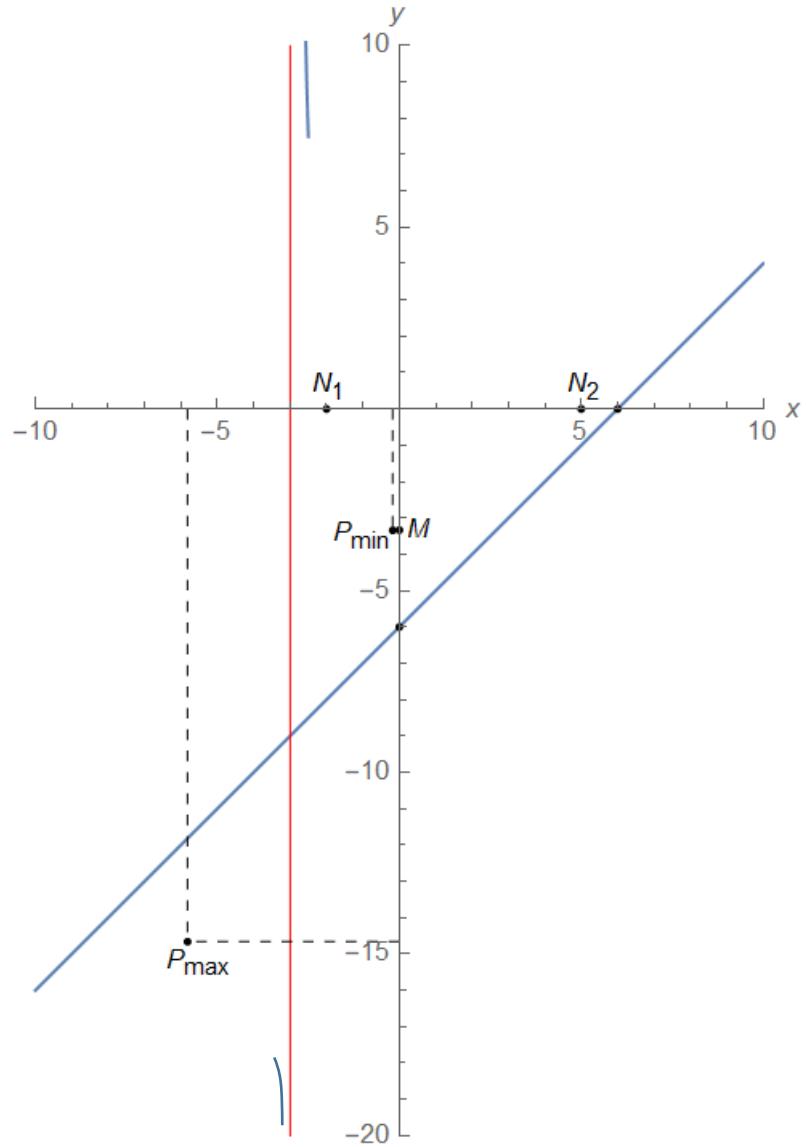
$$P_{\max}(-5,82; -14,66) \quad P_{\min}(-0,18; -3,34)$$

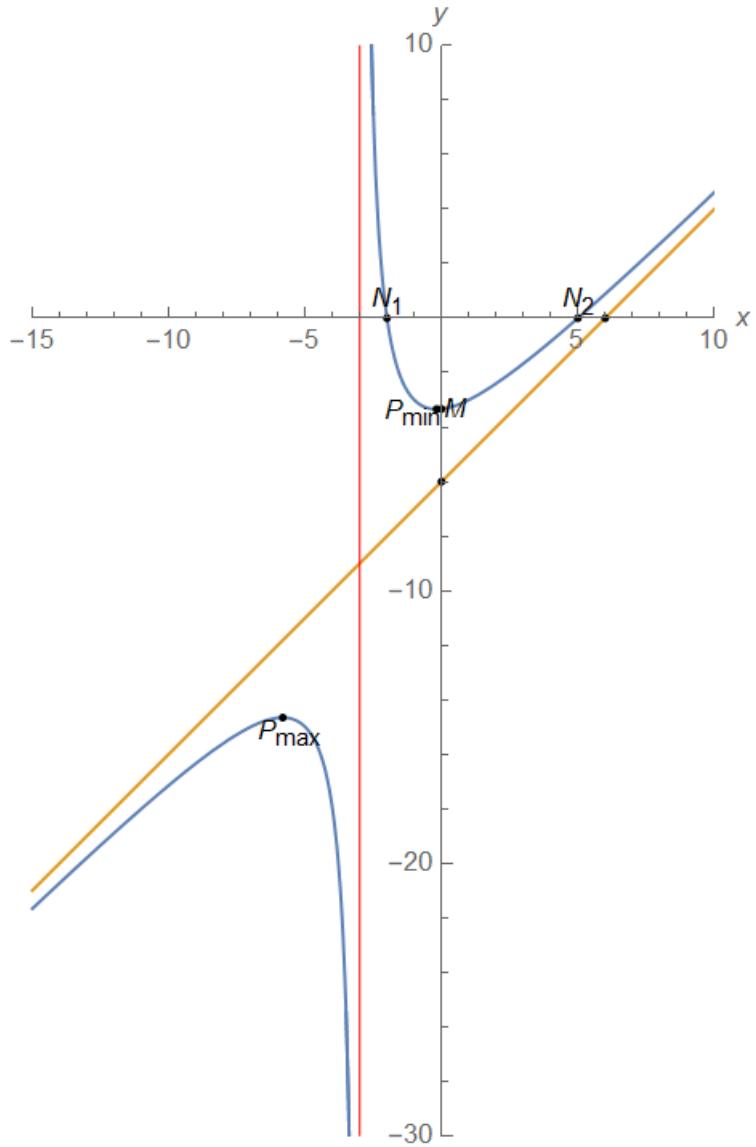
7) konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \frac{16}{(x + 3)^3}$$

Drugi izvod nema nule, jer u brojiocu ima samo konstantu 16, pa prema tome nema ni prevojne tačke.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 - & - & - & - & + & + & + & + & + \\
 \hline
 & & | & & & & | & & \\
 & & -3 & & & & -3 & & \\
 \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 & & & & & & & & \\
 \end{array} \quad y'' = \frac{16}{(x + 3)^3}$$





$$e) y = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 1)^2}$$

- 1) $Df = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- 2) nule funkcije $N_1(2,0), N_2(4,0)$, presek sa y , osom $M(0,8)$
- 3) znak funkcije

$$\begin{array}{ccccccccc}
 + & + & - & - & - & - & + & + \\
 \hline
 & | & & & | & & & \\
 2 & & & & 4 & & &
 \end{array} \quad y = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 1)^2}$$

4) parnost

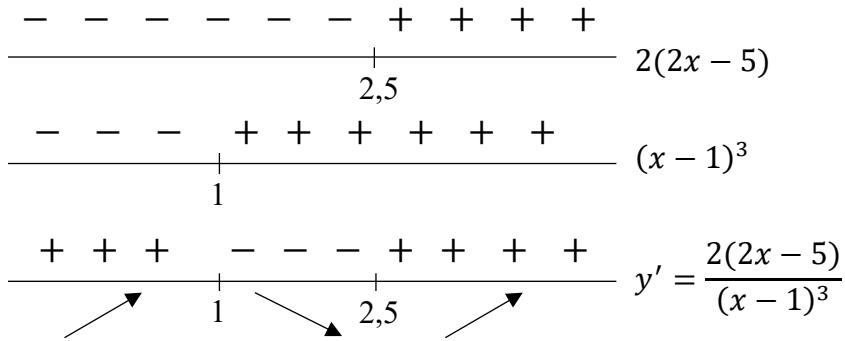
$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 6(-x) + 8}{(-x-1)^2} = \frac{x^2 + 6x + 8}{(-x-1)^2} \neq -f(x)$$

funkcija nije ni parna ni neparna

5) vertikalna asimptota $x = 1$, horizontalna asimptota $y = 1$

6) monotonost i ekstremne vrednosti

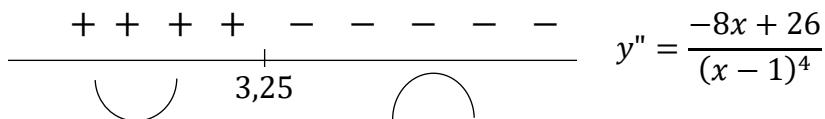
$$y' = \frac{2(2x-5)}{(x-1)^3}$$



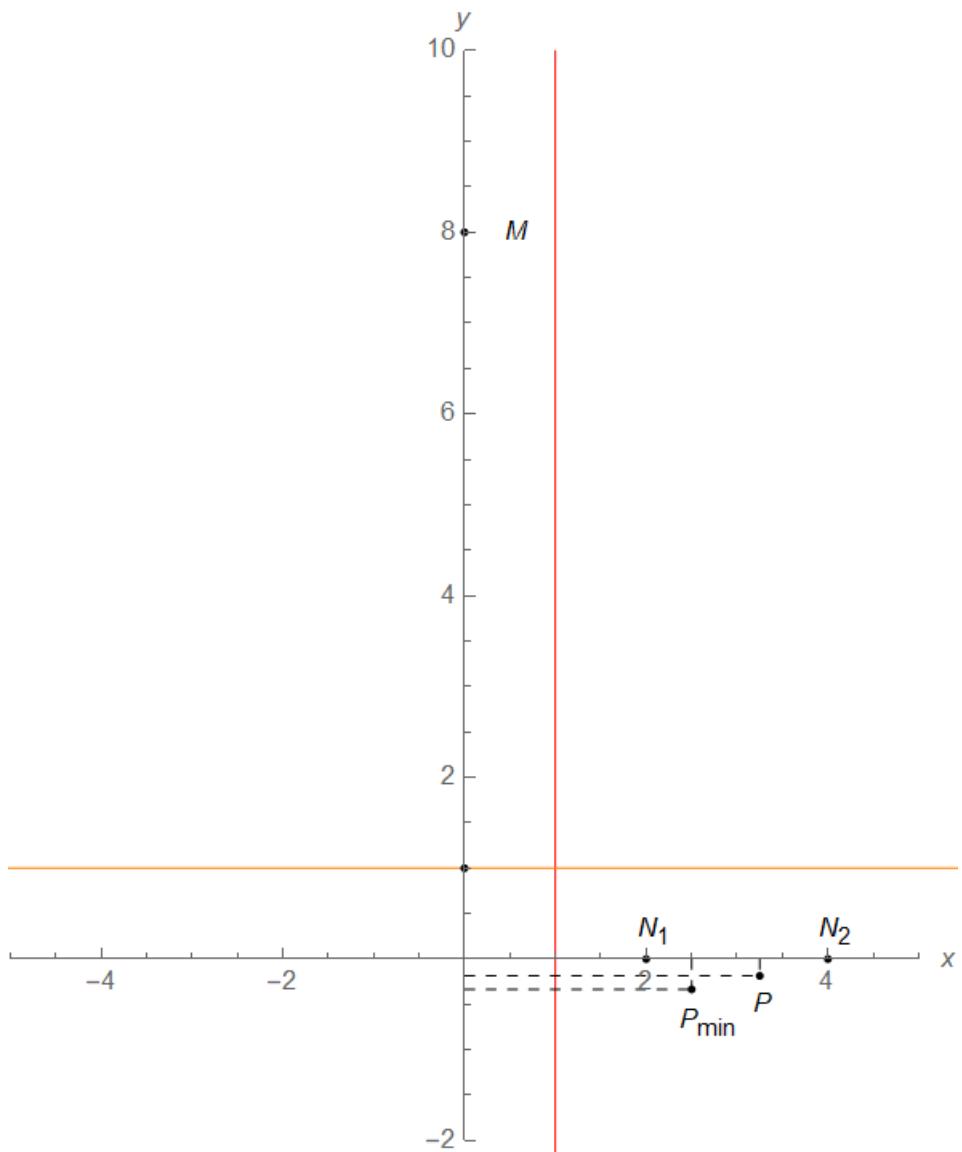
$$P_{min}\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}\right)$$

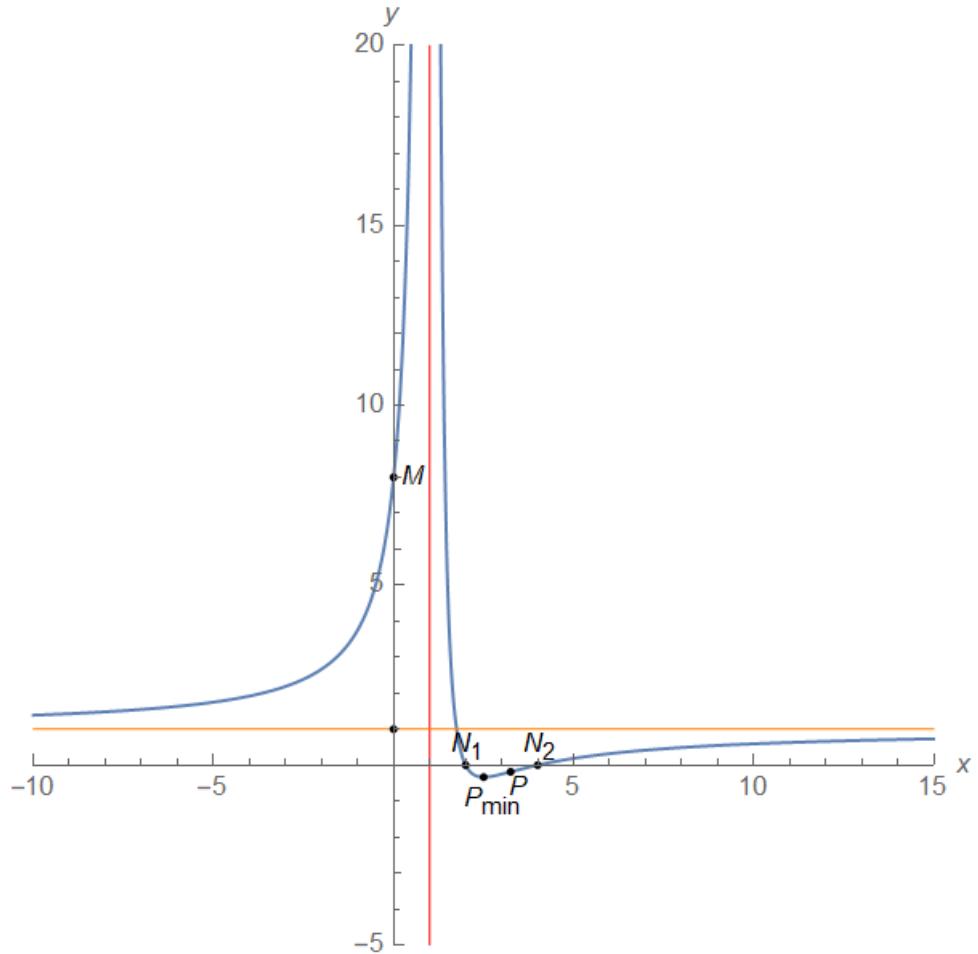
7) konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \frac{-8x+26}{(x-1)^4}$$



prevojna tačka $P(3,25; -0,185)$





$$f) y = \frac{(1-x)^3}{2x^2}$$

- 1) $Df = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- 2) nula funkcije $N(1,0)$, funkcija nema presek sa y osom
- 3) znak funkcije

$$\begin{array}{ccccccccc} + & + & + & + & - & - & - & - \\ \hline & & & | & & & & & \\ y = \frac{(1-x)^3}{2x^2} \end{array}$$

- 4) parnost

$$f(-x) = \frac{(1-(-x))^3}{2(-x)^2} = \frac{(1+x)^3}{2x^2}$$

funkcija nije ni parna ni neparna

- 5) vertikalna asimptota $x = 0$, poklapa se sa y osom, kosa asimptota

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3-x}{2}, \quad \text{prolazi kroz tačke } (3,0) \text{ i } \left(0, \frac{3}{2}\right).$$

- 6) monotonost ekstremne vrednosti

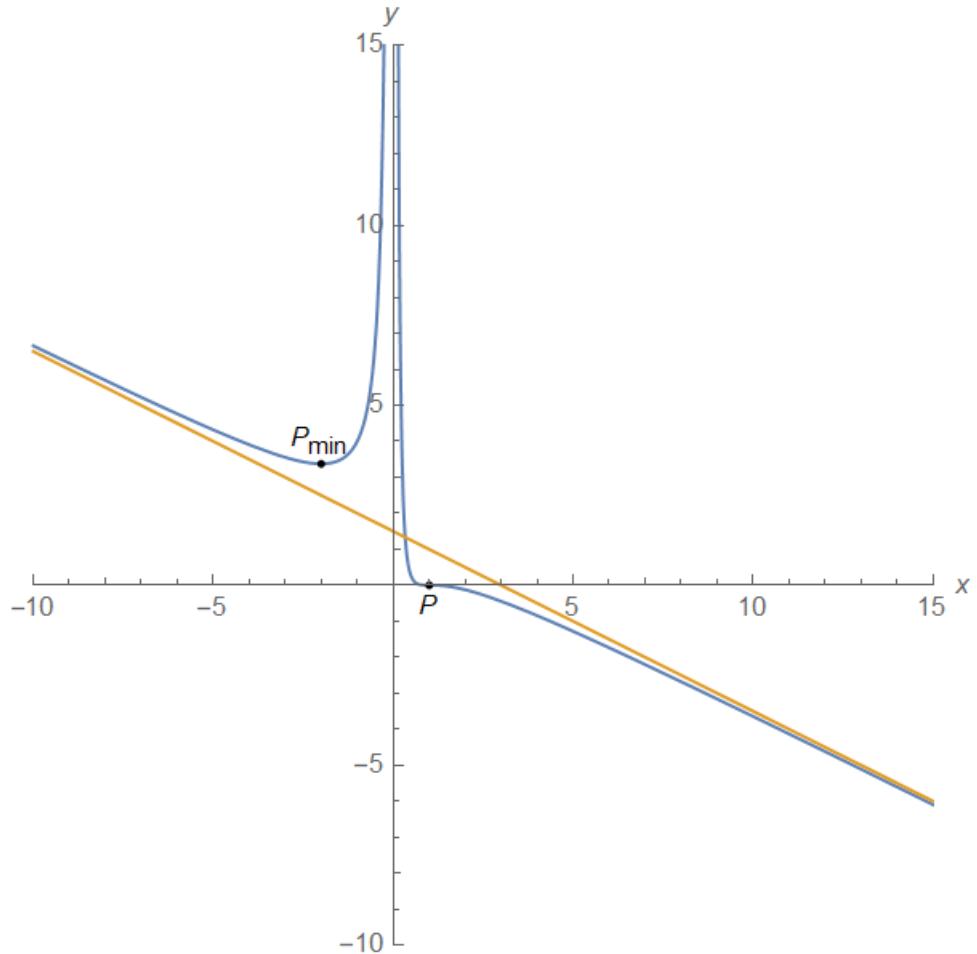
$$\begin{array}{ccccccccc}
 y' = & \frac{(1-x)^2(-x-2)}{2x^3} \\
 + & + & + & - & - & - & - & - & - \\
 \hline
 & & | & & & & & & \\
 & & -2 & & & & & & \\
 \\
 - & - & - & - & - & - & + & + & \\
 \hline
 & & & & & | & & & \\
 & & & & & 0 & & & \\
 \\
 - & - & + & + & + & - & - & \\
 \hline
 & & | & & | & & | & \\
 & & -2 & & 0 & & & \\
 \end{array}$$

7) konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \frac{3(1-x)}{x^4}$$

$$\frac{+ + + + - - -}{\quad \quad \quad 1} \quad y'' = \frac{3(1-x)}{x^4}$$

prevojna tačka $\mathbf{P}(1, 0)$, se poklapa sa nulom funkcije N .



Zadaci za vežbanje

1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije:

$$\begin{aligned}
 a) & y = \frac{x-1}{x+2}, & b) & y = x - \frac{1}{x}, & c) & y = \frac{x^2-x+1}{x-1}, & d) & y = \frac{x^2+6x-7}{x-2}, \\
 e) & y = \frac{(x+2)^2}{x^2+4x-5}, & f) & y = \frac{2x^2-1}{(x-1)^2}.
 \end{aligned}$$

NAPOMENA: Izvršiti detaljnu analizu toka funkcije po svim tačkama, a zatim skicirati grafike funkcija!