

5. NEODREĐENI INTEGRAL

Neka je funkcija $f(x)$ definisana na $(a, b) \subseteq R$. Diferenciranjem funkcije $f(x)$ dobija se izvodna funkcija $f'(x)$. Ovde nas interesuje da li za datu funkciju $f(x)$ postoji funkcija $F(x)$ takva da je $(\forall x \in (a, b))F'(x) = f(x)$.

Primer 1. Za $f(x) = x^2$, $F(x) = \frac{x^3}{3}$ jer je $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$

Definicija 1. Neka je funkcija $f(x)$ definisana na $(a, b) \subseteq R$. Funkcija $F(x)$ je **primitivna funkcija** za funkciju $f(x)$ na intervalu (a, b) ako važi $(\forall x \in (a, b))F'(x) = f(x)$.

U prethodnom primeru smo videli da je $F(x) = \frac{x^3}{3}$ primitivna funkcija za $f(x) = x^2$. Međutim i funkcija $F(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ je primitivna za $f(x) = x^2$, jer je $F'(x) = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2$. Takođe i $F(x) = \frac{x^3}{3} - 100$ je primitivna za $f(x) = x^2$ jer je $F'(x) = \frac{3x^2}{3} - 0 = x^2$. Koji god broj da dodamo uz izraz $\frac{x^3}{3}$ dobijamo isti izvod, jer je izvod od broja (konstante) nula. O tome govori i sledeća teorema.

Teorema 1. Ako je funkcija $F(x)$ primitivna za funkciju $f(x)$ na intervalu $(a, b) \subseteq R$, tada je i funkcija $F(x) + C$, gde je C proizvoljna konstanta, takođe primitivna funkcija za funkciju $f(x)$.

Dokaz. Iz prepostavke da je funkcija $F(x)$ primitivna za funkciju $f(x)$, na intervalu $(a, b) \subseteq R$, sledi, na osnovu definicije 1, da je $(\forall x \in (a, b))F'(x) = f(x)$.

Takođe, $(\forall x \in (a, b))(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$ pa je i $F(x) + C$ primitivna funkcija za $f(x)$.

Ako za datu funkciju $f(x)$ postoji primitivna funkcija $F(x)$, onda za $f(x)$ postoji beskonačno mnogo primitivnih funkcija koje se od $F(x)$ razlikuju za konstantu.

Definicija 2. Proizvoljnu primitivnu funkciju $F(x) + C$, za datu funkciju $f(x)$ na intervalu (a, b) nazivamo **neodređeni integral** funkcije $f(x)$ i zapisujemo $\int f(x)dx = F(x) + C$. $f(x)$ se zove **podintegralna funkcija**, $f(x)dx$ je **podintegralni izraz**, a C je integraciona konstanta.

Primer 1. Dokazati da je $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

$f(x) = \frac{1}{x}$, oblast definisanosti ove funkcije je $Df = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

za $x \in (-\infty, 0)$, tj. za $x < 0$, $\ln|x| = \ln(-x)$

$$\text{pa je } (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

za $x \in (0, +\infty)$, tj. za $x > 0$, $\ln|x| = \ln x = \frac{1}{x}$

Skup svih primitivnih funkcija za funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ je $\{\ln|x| + C\}$.

Osobine neodređenog integrala

Teorema 2. Izvod neodređenog integrala je podintegralna funkcija.

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

Dokaz.

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

Teorema 3. Diferencijal neodređenog integrala je podintegralni izraz.

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

Dokaz.

$$d \left(\int f(x) dx \right) = \left(\int f(x) dx \right)' dx = f(x).$$

Teorema 4. Neodređeni integral diferencijala funkcije $F(x)$ jednak je $F(x) + C$.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Dokaz.

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C$$

Tablica integrala

$$1. \int dx = x + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$$

$$11. \int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \in R, a \neq 0$$

$$15. \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$8. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$$

$$10. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \in R, a \neq 0$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Kao što postoji tablica izvoda, postoji i tablica integrala. Ako znamo tablicu izvoda, lako ćemo upamtiti i tablicu integrala.

Teorema 5. (Osnovna pravila integracije) Neka postoje $\int f(x)dx$ i $\int g(x)dx$ i neka je λ realna konstanta, $\lambda \neq 0$. Tada važe jednakosti:

$$1) \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad 2) \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Iz prethodne teoreme vidimo da postoje samo dva pravila integracije, za proizvod konstante i funkcije i za zbir dve funkcije.

Neki integrali se mogu, transformacijom podintegralne funkcije, svesti na tablične integrale, kao u sledećim primerima:

$$\begin{aligned} 1) \int (2x^2 + 9x - 5)dx &= \int 2x^2 dx + \int 9x dx - \int 5 dx = \\ &= 2 \frac{x^3}{3} + 9 \frac{x^2}{2} - 5x + C \end{aligned}$$

prema pravilu 2)
 tražimo integral svakog
 sabirka posebno

prema pravilu 1)
 konstantu stavljamo
 ispred integrala

$$2) \int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx = \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} + \ln x + C = \\ = \frac{x^3}{3} + x^2 + \ln x + C$$

$$3) \int (2\sqrt{x} - e^x) dx = \int 2\sqrt{x} dx - \int e^x dx = 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx - e^x = 2 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - e^x + C = \\ = 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - e^x + C = = \frac{4}{3} \sqrt{x^3} - e^x + C$$

$$4) \int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1 + 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \\ = \int dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = = x + \arctg x + C$$

$$5) \int \tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \tg x - x + C$$

$$6) \int \frac{dx}{2x^2 + 9} = \int \frac{dx}{2\left(x^2 + \frac{9}{2}\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + C = \\ = \frac{\sqrt{2}}{3} \arctg \frac{\sqrt{2}}{3} x + C$$

1.1. Integracija pomoću smene

Često se kao podintegralna funkcija javlja složena funkcija za koju primitivnu funkciju ne možemo naći direktno u tablici integrala. U tom slučaju primenjujemo metod smene kako bi integral složene funkcije sveli na tablični integral.

Neka je podintegralna funkcija oblika $f(\varphi(x))$. Da bi našli integral ovakve funkcije

$\int f(\varphi(x)) dx$ treba uraditi sledeće:

- 1) uvesti smenu $t = \varphi(x)$; odatle je $x = \varphi^{-1}(t)$;
- 2) diferenciranjem leve i desne strane dobijamo $dx = (\varphi^{-1}(t))' dt$, pa integral $\int f(\varphi(x)) dx$ dobija oblik $\int f(t)(\varphi^{-1}(t))' dt$, koji bi trebalo da se relativno lako rešava primenom tablice, ukoliko je smena dobro odabrana;
- 3) u dobijenoj primitivnoj funkciji $F(t)$, t zamenjujemo sa $\varphi(x)$.

Primer 1. $\int \sin 2x dx$,

u ovom primeru je $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = 2x$, $f(\varphi(x)) = f(2x) = \sin 2x$

$$\begin{aligned}\int \sin 2x dx &= \left(\begin{array}{l} t = 2x \\ x = \frac{t}{2}, dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right) = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \sin t dt = \frac{1}{2}(-\cos t) + C = \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2x + C\end{aligned}$$

Smena može biti i oblika $g(t) = \varphi(x)$ što ćemo videti u sledećem primeru.

Primer 2.

$$\int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \left(\begin{array}{l} t^2 = x^2 - 4 \\ 2tdt = 2xdx \end{array} \right) = \int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2}} = 2 \int \frac{tdt}{t} = 2 \int dt = 2t + C = 2\sqrt{x^2 - 4} + C$$

Ako je podintegralna funkcija oblika $f(ax + b)$, gde je $\int f(x)dx$ tablični integral, onda

$$\text{primenjujemo sledeću smenu } \int f(ax + b)dx = \left(\begin{array}{l} t = ax + b \\ dt = adx \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{array} \right) = \int f(t) \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} \int f(t) dt.$$

Na ovaj način se integral svodi na tablični integral.

Primer 3. $\int (3x + 2)^5 dx$ Ovaj integral je najsličniji tabličnom integralu

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \quad \text{Zato ćemo upotrebiti smenu } t = 3x + 2.$$

$$\begin{aligned}\int (3x + 2)^5 dx &= \left(\begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right) = \int t^5 \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^5 dt = \frac{1}{3} \frac{t^6}{6} + C = \frac{t^6}{18} + C = \\ &= \frac{(3x + 2)^6}{18} + C\end{aligned}$$

Primer 4.

$$\begin{aligned}\int \sin(3x + 4) dx &= \left(\begin{array}{l} t = 3x + 4 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right) = \int \sin t \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int \sin t dt = \frac{1}{3}(-\cos t) + C = \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 4) + C\end{aligned}$$

Primer 5.

$$\int \frac{1}{6-7x} dx = \begin{pmatrix} t = 6-7x \\ dt = -7dx \\ dx = \frac{-1}{7}dt \end{pmatrix} = \int \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{7} \right) dt = -\frac{1}{7} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{7} \ln|t| + C = \frac{1}{7} \ln|6-7x| + C$$

Primer 6.

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx \begin{pmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \arctg t + C = \frac{1}{2} \arctg 2x + C$$

Primer 7.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{9}{4}x^2\right)}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{\left(1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2\right)}} dx = \begin{pmatrix} t = \frac{3}{2}x \\ dt = \frac{3}{2}dx \\ dx = \frac{2}{3}dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{3} \arcsin t + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{2}x + C$$

Ako su podintegralne funkcije oblika $f(x) \cdot f'(x)$ ili $\frac{f'(x)}{f(x)}$, uvodi se smena $\begin{pmatrix} t = f(x) \\ dt = f'(x)dx \end{pmatrix}$

Primer 8.

$$\int \sin x \cos^2 x dx = \begin{pmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{pmatrix} = - \int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Primer 9.

$$\int x \cos(x^2 + 1) x dx = \begin{pmatrix} t = x^2 + 1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 1) + C$$

Primer 10.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left(\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right) = \int \frac{-dt}{t} = -\ln t + C = -\ln(\cos t) + C$$

Integrali u kojima u podintegralnoj funkciji javlja kvadratna funkcija $ax^2 + bx + c$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx, \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$$

Kvadratnu funkciju svodimo na kanonični oblik $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} \right]$

i primenjujemo smenu $t = x + \frac{b}{2a} \Rightarrow dt = dx$.

Kod integrala oblika $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, smenom $t = x + \frac{b}{2a}$ dobijamo neki od tabličnih integrala

oblika $\int \frac{dt}{t^2+p^2}, \int \frac{dt}{t^2-p^2}$ ili $\int \frac{dt}{t^2}$.

Primer 11.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} &= \int \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\begin{array}{l} t = x - \frac{5}{2} \\ dt = dx \end{array} \right) = \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{2}}{t + \frac{1}{2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| + C \end{aligned}$$

Kod integrala oblika $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, smenom $t = x + \frac{b}{2a}$ dobijamo neki od tabličnih integrala oblika $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm p^2}}, \int \frac{dt}{\sqrt{p^2-t^2}}$ ili $\int \frac{dt}{t}$.

Primer 12.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right]}} = \left(\begin{array}{l} t = x + \frac{1}{4} \\ dt = dx \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{7}{16}}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \frac{7}{16}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} \right| + C$$

ZADACI ZA VEŽBANJE

$$1) \int (2\ln x - 5\sin x) dx \quad 2) \int \frac{1-x^2}{1+x} dx \quad 3) \int \frac{1+x}{x^2} dx \quad 4) \int \frac{1-x^2}{x^3} dx$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}} \quad 6) \int \frac{dx}{x^2-3} \quad 7) \int \frac{dx}{3x^2+27} \quad 8) \int \cos 3x dx$$

$$9) \int \sin(2x+3) dx \quad 10) \int e^{1-x} dx \quad 11) \int (5x+4)^{10} dx \quad 12) \int xe^{x^2+1} dx$$

$$13) \int \frac{\ln^2 x}{x} dx \quad 14) \int \operatorname{ctg} x dx \quad 15) \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad 16) \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$17) \int \frac{dx}{x^2-4x+4} \quad 18) \int \frac{dx}{x^2-4x+1}$$

1.2. Parcijalna integracija

Neka su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ funkcije. Znamo da je $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. Integracijom leve i desne strane dobijamo $\int (u \cdot v)' dx = \int (u'v + uv') dx$.

Na osnovu teoreme 4 $\int (u \cdot v)' dx = \int d(u \cdot v) = u \cdot v + C$,

pa dobijamo $\int (u'v + uv') dx = u \cdot v + C$.

Primenom teoreme 5 $\int (u'v + uv') dx = \int u'v dx + \int uv' dx = \int vdu + \int udv$, jer je $du = u' dx$, $dv = v' dx$. Na osnovu toga dobijamo $\int vdu + \int udv = u \cdot v + C$. Odatle dobijamo formulu za parcijalnu integraciju

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu + C.$$

Kod podintegralne funkcije za u biramo množitelj koji je pogodan za diferenciranje, a ono što je ostalo zajedno sa dx čini dv i treba da bude pogodno za nalaženje integrala.

Primer 1.

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= \left(\begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = \\ &= e^x(x-1) + C \end{aligned}$$

Primer 2.

Kod integrala $\int x^2 \ln x \, dx$, lakše je uzeti za $u = \ln x$ jer je izvod funkcije $\ln x$ tablični izvod, dok se integral ove funkcije teže određuje.

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx, v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right) = (\ln x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C \end{aligned}$$

Primer 3. U slučaju integrala $\int \ln x \, dx$ opet uzimamo za $u = \ln x$, a za dv ostaje dx .

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, v = \int dx = x \end{array} \right) = (\ln x) \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

Primer 4. Kod nekih integrala potrebno primeniti parcijalnu integraciju više puta kako bi se došlo do rešenja.

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = x^2, du = 2x \, dx \\ dv = \sin x \, dx, v = \int \sin x \, dx = -\cos x \end{array} \right) = \\ &= x^2 \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2x \, dx = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = \left(\begin{array}{l} u_1 = x, du_1 = dx \\ dv_1 = \cos x \, dx, v_1 = \int \cos x \, dx = \sin x \end{array} \right) = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right) = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - (-\cos x)) + C = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Primer 5. } \int e^x \sin x \, dx &= \left(u = e^x, du = e^x \, dx \right. \\
&\quad \left. dv = \sin x \, dx, v = \int \sin x \, dx = -\cos x \right) = \\
&= e^x(-\cos x) - \int -\cos x e^x \, dx = \\
&= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = \left(u_1 = e^x, du_1 = e^x \, dx \right. \\
&\quad \left. dv_1 = \cos x, v_1 = \int \cos x \, dx = \sin x \right) = \\
&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx
\end{aligned}$$

U ovom primeru smo nakon dva puta primenjene parcijalne integracije opet dobili polazni integral. Da bismo došli do rešenja obeležićemo ovaj integral sa $I = \int e^x \sin x \, dx$, pa do rešenja dolazimo rešavanjem jednačine

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$I = \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x) + C$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x) + C$$

ZADACI ZA VEŽBANJE

$$1) \int x^5 \ln x \, dx \quad 2) \int x \sin 2x \, dx \quad 3) \int x^5 e^x \, dx \quad 4) \int x^2 \cos x \, dx \quad 5) \int x \ln^2 x \, dx$$